Blockkurs Mathematik – FU Berlin, Geol. Wissenschaften – WS17/18

Junior-Prof. Lena Noack

Für die Korrektheit des Skipts wird keine Verantwortung übernommen. Fehler und Hinweise gerne per E-Mail an: lena.noack@fu-berlin.de

Die blauen Bereiche heben Regeln hervor (auch zu finden in der Kurzfassung).
Die grünen Kästchen heben Aufgaben hervor. Die Lösungen sind am Ende des Skripts zu finden.

Inhaltsverzeichnis

Tag 1
… Einfaches Rechnen 2
… Brüche 2
… Klammern 3
… Potenzen und Wurzeln 5
… Summe und Fakultät 6

Tag 2
… Wiederholung 7
… Exponentielle Funktionen 8
… Logarithmus 8
… Räume und Mengen 11
… Funktionen 12
… Ableitungen 13

Tag 3
… Integrale 15
… Geometrie 17
…… Rechteck und Quader 17
…… Dreieck 18
…… Kugel und Kreis 19
… Trigonometrische Funktionen 19
…… Integration und Ableitung 21

Tag 4
… Gleichungen aufstellen und lösen 22
… Sachaufgaben Dreisatz 23
… Vektoren 24
… Matrizen 27

Tag 5
… Wiederholung, Aufgaben 28
… Beispiele aus Alltag 32
… Beispiele aus Geologie 33
Lösungen 36

Tag 1

Mathematiker rechnen nicht nur mit Zahlen, sondern gerne auch mit Buchstaben:

- meist $\mathrm{a, b, c, d}$ für reelle Zahlen und Geometrie,
- $\mathrm{m, n}$ für natürliche Zahlen,
- $\mathrm{i, j, k}$ für Index (Summenformel),
- $\mathrm{f, g, h}$ für Funktionen,
- $\mathrm{x, y, z}$ für Funktionswerte und Richtungen,
- Physik: t für Zeit, v für Geschwindigkeit etc.

Einfaches Rechnen

Allgemeine Regeln

Kommutativgesetz:

- $\mathrm{a + b = b + a}$ (gilt nicht für $\mathrm{a - b}$)
- $a \cdot \mathrm{b} = b \cdot \mathrm{a}$ (gilt nicht für $\mathrm{a/b}$)

Assoziativgesetz:

- $\mathrm{(a + b) + c = a + (b + c)}$
- $(a \cdot \mathrm{b}) \cdot \mathrm{c} = \mathrm{a} \cdot (\mathrm{b} \cdot \mathrm{c})$

Punkt- vor Strichrechnung: $a + b \cdot \mathrm{c} \rightarrow$ erst $b \cdot \mathrm{c}$, dann $+\mathrm{a}$ rechnen

Operatorenreihenfolge:

- Klammern (von innen nach außen)
- Multiplikation und Division
- Addition und Subtraktion

Beispiele:

- $3 - (2 \cdot (3 + 2) - 5) = 3 - (2 \cdot 5 - 5) = 3 - (10 - 5) = 3 - 5 = -2$
- $3 - 2 \cdot (3 + 2) - 5 = 3 - 2 \cdot 5 - 5 = 3 - 10 - 5 = -12$
- unsichtbare Klammern: $\frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 \rightarrow$ Vorsicht beim Taschenrechner!

Genauso: $1/2\mathrm{a} \neq 1/(2\mathrm{a})$ im Taschenrechner (abhängig vom Taschenrechner)

Allgemeine Rechenübungen mit Brüchen

Bruch: $\frac{a}{b}$ oder a/b oder $^{a}/_{b}$ oder a:b oder a÷b oder a b^{-1}; → a/b im Taschenrechner

allgemein: $\frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$; $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

- Achtung: in Schule gelernt: $3\frac{2}{3} = 3 + \frac{2}{3} = \frac{11}{3}$; jetzt: $3\frac{2}{3} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$!!!
- Bruch umkehren: $\left(\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
- Kürzen: $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}$ für $k \neq 0$
- Addition/Subtraktion: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- Multiplikation: $\frac{a}{b} \cdot \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} = \frac{ac}{bd}$
- Division: $\frac{a/b}{c/d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$ (Umkehrbruch anwenden)

Aufgaben: soweit wie möglich zusammenfassen

- $\frac{5}{3} + \frac{1}{6} =$
- $\frac{7}{4} - \frac{1}{4} =$
- $\frac{7/11}{3/22} =$
- $\frac{1}{5/7} =$
- $\frac{8}{3} - \frac{3}{9/8} =$
- $\frac{5}{2} - \frac{2}{5} =$
- $\frac{3}{6/7} =$
- $\frac{8}{3+1} =$
- $\frac{8}{3} - \frac{2}{6} - \frac{3}{9} =$
- $\frac{5}{2} + 3 =$
- $\frac{a}{a^2} =$
- $\frac{ab}{b} =$
- $\frac{2a+4ab}{2a} =$
- $\frac{2}{a} + \frac{a}{2} =$
- $5 + \frac{3}{a} =$
- $\frac{a+1}{a} =$
- $\frac{2}{3a} - \frac{3}{a} =$

Wann werden Klammern benötigt?

- Punkt- ("$\cdot$", "$/$") vor Strichrechnung ("$+$", "$-$")!
- $5 + 2 \cdot 4 \neq (5 + 2) \cdot 4 \rightarrow$ Klammer nötig
- $5 + 3/2 \neq (5 + 3)/2 \rightarrow$ Achtung in Textform / beim Taschenrechner

Aufgaben:

Streiche alle nicht benötigten Klammern (nicht zusammenfassen!):

- $(5 + 3) - 2 =$
- $(3 \cdot 4) \cdot 5 + 3 =$
- $\frac{3}{8} \cdot (2 + 7) =$
- $\frac{(3-(4 \cdot 6))}{(2-5)} =$
- $3\left(\frac{2+3}{8} + (5 - 2)\right) =$
- $7 - (3 - 5) =$
- $2 - (8 + 3) \cdot 2 =$
- $\frac{(8-2)}{3} =$

Ausklammern/Klammen auflösen:

- $ac \pm bc = (a \pm b)c$ → Notiz: praktisch für Kürzungen in Brüchen/Gleichungen
- $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = (a \pm b) \cdot \frac{1}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

Klammern multiplizieren

- $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

Binomische Formeln

- $(a+1)(a+1) = a^2 + 2a + 1$
- $(a-1)(a-1) = a^2 - 2a + 1$
- $(a+1)(a+1) = a^2 - 1$

Aufgaben:

- $\frac{5}{7} + \frac{6}{7} =$
- $4\sqrt{3} - c\sqrt{3} =$
- $\frac{a^2-1}{a+1} =$
- $3 + 6x - 9x^2 =$
- $a^2 - 2ax + x^2 =$
- $\frac{x}{2} - (2+x)x =$
- $(5+x)(2-b) =$
- $(3-x)(3+x) =$
- $\frac{x}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{6}{x}\right) =$
- $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2} =$
- $\frac{5}{2}(4x - 12 + 8x) =$
- $-\frac{2+4x}{1-2x} =$
- $3 - \frac{4 \cdot 6 - 2}{2} =$
- $5x - 15x^2 =$
- $\frac{25-4a^2}{5+2a} =$
- $3 - \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{9}\right) =$
- $7\left(2 - \frac{5}{14}\right) =$
- $\frac{5-a}{3-a} =$
- $\frac{3\sqrt{5}+a\sqrt{5}}{3} =$
- $20 - 4x + 16x^2 =$
- $\frac{2a}{3a^2} - \frac{1}{a} =$

Allgemeine Rechenregeln mit Potenzen:

- $a^0 = 1$
- Multiplikation, gleiche Basis: $a^n a^m = a^{n+m}$ → Merken: $a^n \cdot 1 = a^n a^0 = a^{n+0}$
- Division, gleiche Basis: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

  → also (da $a^0 = 1$): $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{1}{a^n}$
- Potenzieren von Potenzen: $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn})(a^m)^n$
- Multiplikation, gleiche Exponenten: $a^m b^m = (ab)^m$
- Division, gleiche Exponenten: $\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m$

Aufgaben (nur zusammenfassen):

- $a^6 + a^4 =$
- $x^5 x^4 =$
- $(x^5)^4 =$
- $\frac{7^5}{7^6} =$
- $5^m + 3^m =$
- $5^m 3^m =$
- $a^4 3^4 =$
- $5^n 3^{2n} =$
- $5^n 3^{n+3} =$

Wurzeln – nicht-natürliche Zahlen als Potenz

- $5^2 = 25 \rightarrow \sqrt{25} = 5$
- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
- $\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
- $(\sqrt{a})^2 = (a^{\frac{1}{2}})^2 = a$
- $2^3 = 8 \rightarrow \sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
- $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Aufgaben

- $a^{1/2} a^{3/2} =$
- $\frac{1}{\sqrt{a}} =$
- $\sqrt{36} =$
- $\sqrt{27} =$
- $\sqrt{8} \cdot \sqrt{2} =$
- $\sqrt{64}/\sqrt[3]{3} =$
- $\sqrt{64}/\sqrt[3]{64} =$
- $\sqrt{5} \cdot \sqrt{25} =$
- $\sqrt{5 - 9/3} \cdot \sqrt{2} =$
- $\sqrt[3]{4} =$
- $\sqrt[3]{4} \cdot 2^{1/3} =$

Summe
n ($i = 1,2,3, \dots, n$) einführen: Summe $\sum_{i=1}^{n} i$
- $i = 1 \rightarrow 1$
- $i = 2 \rightarrow 1 + 2 = 3$
- $\dots$
- $i = 7 \rightarrow 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28$

Herleiten über

a) n gerade
$1 + 2 + 3 + 4 = (1 + 4) + (2 + 3)$
$n = 4 \rightarrow \frac{n}{2}(n + 1)$
b) n ungerade
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = (1 + 4) + (2 + 3) + 5$
$n = 5 \rightarrow \frac{n+1}{2} n$
⇒ beide Varianten $\frac{n(n+1)}{2}$

Fakultät
$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
$n! = n \cdot (n - 1) \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$
$0! \coloneqq 1$ (Definiert als 1)

Eulersche Zahl

- Eulersche Zahl $e = 2.718$ ...
- woher kommt e?
- Grenzwert der Folge $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$
- e = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$

Primzahlen
$1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,$ ...

Es gibt unendlich viele Primzahlen → Multipliziere Primzahlen $+1$ ergibt immer eine neue Primzahl:
- $1 \cdot 2 + 1 = 3$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 = 7$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 = 31$
- $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 = 211$
- ...

Warum?
- Neue Zahl kann nicht durch 2 teilbar sein, da ungerade
- Kann nicht durch drei teilbar sein, da Zahl -1 ja durch 3 teilbar
- ...
  → Muss neue Primzahl sein!

Tag 2

Wiederholung einfaches Rechnen

- $5-3(2-a)=$
- $2(x^2-x)+x=$
- $(2-3a)(2+3a)=$
- $\frac{4+a}{2}=$
- $\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=$
- $\frac{27-3a}{6x}=$
- $\frac{4}{3}-2\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)=$
- $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}3=$
- $5^3 5^{-2}=$
- $\frac{2^3\cdot 2^5}{4^2}=$
- $\sqrt{3}\cdot 9^{\frac{1}{3}}=$
- $\sqrt{3^2+4^2}=$
- $\frac{8^3}{4^2}=$
- $\sqrt{3+3!}=$
- $\sum_{i=1}^{3}(i+1)=$
- $\sqrt[3]{8^6}=$

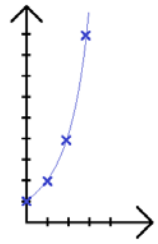
Bingo mit Rechenaufgaben

Zahlen 1-30, Zettel mit 16 Feldern

1) $(3-1)(5-1)=$
2) $\frac{17}{11}+\frac{16}{11}=$
3) $4!=$
4) $5^2-2^3=$
5) $2^2\cdot 3=$
6) $2\cdot 3\cdot 5=$
7) $\sum_{i=1}^{4} i=$
8) $\frac{5+3}{8-4}=$
9) $5\cdot 3-2=$
10) $3+\frac{7+5}{8}-\frac{1}{2}=$
11) $3\cdot 7=$
12) $\sum_{i=1}^{5} i=$
13) $4^2+3^2=$
14) $5\cdot\left(\frac{17}{4}-\frac{2}{8}\right)=$
15) $6^0=$
16) $4+3^0=$
17) $3^3-2^3=$
18) $\frac{52}{2}=$
19) $(5+8)\cdot 2-3=$
20) $\frac{7/3}{1/3}=$
21) $\frac{1}{4^{-2}}=$
22) $111-66-16=$
23) $3^2=$
24) $3!=$
25) $\frac{28}{2}=$
26) $13+7\cdot 2=$
27) $2\cdot 3^2=$
28) $\frac{132}{6}=$
29) $3\cdot 4-1=$
30) $\sum_{i=1}^{7} i=$

Exponentielle Funktionen

- Beispiel Zellenteilung Tag 0: 1 Zelle, Tag 1: 2 Zellen, Tag 2: 4 Zellen, ...
- An Tafel zeichnen x-y Koordinatensystem



- Raten, welche Funktion? $0 \to 1,\ 1 \to 2,\ 2 \to 4,\ 3 \to 8,\ 4 \to 16,\ 5 \to 32, \dots$
- hier nach x Tagen 2^x Zellen -> $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \dots \to x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$
- Zellen steigen exponentiell an

Regeln für exponentielle Funktionen:

- für $a \neq 0; a \neq 1$:
- $a^x \cdot a^k = a^{x+k}$
- $a^{x-k} = a^x / a^k$
- $(a^x)^k = a^{kx}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

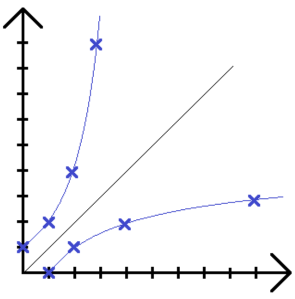
Besondere Basis: Eulersche Zahl e: e^x oder $\exp(x)$ geschrieben ist die Exponentialfunktion (Funktionen mit anderer Basis heißen exponentielle Funktionen)

- $e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!} \ \to\ für\ x = 1: e = e^1 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$ → Definition Eulersche Zahl Tag 2
- Spielt eine wichtige Rolle in Infinitesimalrechnung und in (geo-)physikalischen Anwendungen!

➔ Potenzfunktionen: x^a, x Variable und a Konstante
➔ Exponentielle Funktionen: a^x
➔ Exponentialfunktion: e^x

Logarithmus
Frage, nach wie vielen Tagen hat man 1024 Zellen? → Logarithmus

An Tafel anzeichnen $\exp(x)$ Funktionen und $\log(x)$ Funktionen → $\log(x)$ geht immer durch (1,0), exponentielle Funktionen immer durch (0,1); $\exp(x)$ und $\log(x)$ gespiegelt; 2^x und $\log_2(x)$ zeichnen ($-1 \to \frac{1}{2};\ \ 0 \to 1;\ \ 1 \to 2;\ \ 2 \to 4$ und $0.5 \to -1;\ \ 1 \to 0;\ \ 2 \to 1;\ \ 4 \to 2$)



Regeln, Logarithmus zur Basis k:

- $\log_k(k) = 1$
- $\log_k(k^a) = a$
- $\log_k(a^b) = b \log_k(a)$; ABER $\log_k(a^b) \neq (\log_k(a))^b$
- $\log_k(1) = 0$

Beispiel: 1024 = 2^x <=> log 1024 = log (2^x) = x log 2 <=> x=log 1024 / log 2 = 10

Verschieden spezielle log Funktionen:

- $\log(x) = \log_{10}(x) \to \log_{10}(100) = 2$
- $\log_2(x) \to \log_2(8) = 3;\ \log_2(1024) = 10$
- $\ln(x)$ hat Basis e ($\ln(x) = \log_e(x)$); $\ln$ ist natürlicher Logarithmus
  $\to \ln(e) = 1;\ \ln(e^x) = x$
- $10^0 = 1; 2^0 = 1; e^0 = 1$
  $\to \log(1) = \log_2(1) = \ln(1) = 0$

Beispiel: $1024 = 2^x \Leftrightarrow \log_2(1024) = \log_2(2^x) = x \Leftrightarrow x = \log_2(1024) = 10$

Weitere Regeln

- $\log_k(ab) = \log_k(a) + \log_k(b)$ | $\log_k(a \cdot 1) = \log_k(a) + \log_k(1) = \log_k(a) + 0$
- $\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b)$
- $\log_k(a) = \frac{\log(a)}{\log(k)}$
  $\Leftrightarrow \log_k(a) = x \Leftrightarrow \log_k(a) = x\log_k(k) \Leftrightarrow \log_k(a) = \log_k(k^x) \Leftrightarrow a = k^x$
  $$\Leftrightarrow \log(a) = x\log(k) \Leftrightarrow \log_k(a) = x = \frac{\log(a)}{\log(k)}$$

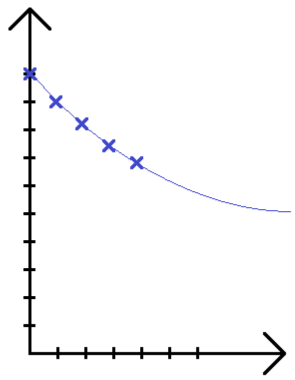
Siehe Beispiel oben ($1024 = 2^x$), $\log(x)$ / $\ln(x)$ auf beide Seiten der Gleichung anwenden ist das gleiche wie beide Seiten mal 2 oder mal 4 zu multiplizieren

- $1024 = 2^x \Leftrightarrow \log(1024) = \log(2^x) = x\log(2) \Leftrightarrow x = \log(1024) / \log(2)$
- $1024 = 2^x \Leftrightarrow \ln(1024) = \ln(2^x) = x\ln(2) \Leftrightarrow x = \ln(1024) / \ln(2)$
- $1024 = 2^x \Leftrightarrow \log_2(1024) = \log_2(2^x) \Leftrightarrow x = \log_2(1024)/\log_2(2) \Leftrightarrow x = \log_2(1024)$

Beispiel Bierschaum

Glas Bier: Höhe Schaum 10 cm wenn frisch gezapft, Höhe nimmt pro Minute um 10% ab → Wieviel Prozent noch nach 4 min?

Bild an Tafel, erst $(0{,}10)$, dann $(1{,}9)$, dann $(2{,}8.1)$, $(3{,}7.29)$, $(4{,}6.56)$
→ gespiegelte logarithmische Funktion
→ in gleichem Plot die Abnahme über Zeit
→ $(0{,}0)$, $(1{,}1)$, $(2{,}1.9)$, $(3{,}2.71)$, $(4{,}3.44)$



$h(t[min]) = 10 \cdot 0.9^t$
→ nach 4 Minuten $h = 10 \cdot 0.9^4 = 10 \cdot 0.66 = 6.6$ cm → kann ohne $\log(x)$ gelöst werden

ABER: Nach wie vielen Minuten nur noch Hälfte des Schaums übrig?

$5 = 10 \cdot 0.9^t \Leftrightarrow 0.5 = 0.9^t \Leftrightarrow \log(0.5) = t\log(0.9) \Leftrightarrow t = \frac{\log(0.9)}{\log(0.5)} = 6.6$

→ nach 7 Minuten Hälfte des Schaums weg

Wann nur noch 10% des Schaums übrig?

$1 = 10 \cdot 0.9^t \Leftrightarrow 0.1 = 0.9^t \Leftrightarrow \log(0.1) = t\log(0.9) \Leftrightarrow \ t = \frac{\log(0.1)}{\log(0.9)} = 21.9$

→ Nach 22 Minuten nur noch 10% Schaum übrig

Beispiele:

- $10 = e^x \Leftrightarrow \ln(10) = x$
- $\log(x) = 2 \Leftrightarrow x = 10^2$
- $2^x = 8 \Leftrightarrow x = \log_2(8) \ \left(= \frac{\log(8)}{\log(2)}\right) = 3$
- $\log(a) \cdot \log(b)$ → keine Änderung

Aufgaben:

- $\frac{e^{3x}}{2e^x} =$
- $\frac{1}{e^{x-5}} =$
- $\log(10) =$
- $\ln(1) =$
- $\frac{\log(x^2)}{2} =$
- $32 = 2^x \rightarrow \ x = ?$
- $625 = 5^x \rightarrow x = ?$
- $\log_2(3) + \log_2(5) =$
- $\log_2(3) + \log_2(3) =$
- $3\log(10) =$
- $\log(200) =$

Räume

Freitag schon benutzt: natürliche Zahlen, reelle Zahlen:

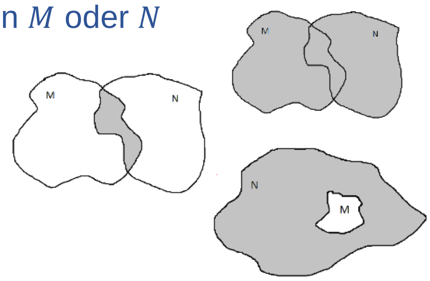
- $\mathbb{N}$ - Raum aller ganzen, positiven Zahlen $(1{,}2{,}3, \dots)$ oder $(0{,}1{,}2{,}3, \dots)$
- $\mathbb{N}_0$ - alle natürliche Zahlen plus 0 $(0{,}1{,}2{,}3, \dots)$
- $\mathbb{N}_\emptyset$ - alle natürliche Zahlen ohne 0 $(1{,}2{,}3, \dots)$
- $\mathbb{Z}$ - alle ganzen Zahlen $(\dots, -2, -1{,}0{,}1{,}2, \dots)$
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ → Exkursion Mengen $\subset$ und $\in$ erklären, Rest später
- $\mathbb{Q}$ - alle rationalen Zahlen, d.h, Zahlen die durch Brüche mit ganzen Zahlen im Zähler und Nenner enststehen
- $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} | m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\}$
  - $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ (jede Zahl $n = n/1$)
- $\mathbb{R}$ - alle reellen Zahlen: jede Zahl auf der Zahlengeraden "ohne Zwischenräume", jede reelle Zahl auch als Dezimalzahl darstellbar, evt. unendlich viele Ziffern (π)
- $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ ohne $\mathbb{Q}$) - alle irrationalen Zahlen, z.B. $\sqrt{3}$ lässt sich nicht als Bruch darstellen
  - $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, ...
- $\mathbb{C}$ - komplexe Zahlen, da $\sqrt{-1}$ keine reelle Zahl ist, wird geschrieben als i, zweidimensionaler Zahlenraum
  $\rightarrow z = a + bi \rightarrow$ komplexe Zahl
  - $a = Re(z)$ reeller Teil
  - $b = Im(z)$ imaginärer Teil
  - $a - bi = \bar{z}$ konjugiert komplexe Zahl $\rightarrow z \cdot \bar{z}$ in $\mathbb{R}$ relle Zahl

Intervalle

- $[0; 10]$ → beinhaltet 0 und 10
- $(0; 10)$ → gleiches Intervall ohne 0 und 10
- $(0; 10) \in \mathbb{N}_0 \rightarrow 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$
- Intervalle sind Teilmengen von Räumen
- $\{0; 10\}$ → Menge die nur zwei Zahlen 1 und 10 enthält

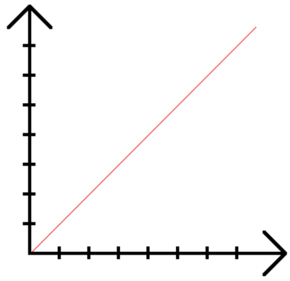
Mengen

- Menge $M \subset \mathbb{R}$ → Menge die in Raum $\mathbb{R}$ enthalten ist
  $\rightarrow [0; 1] \rightarrow$ alle Zahlen zwischen 0 und 1 inkl. Brüche, irrationale Zahlen etc.
- $M \cup \mathrm{N}$ → Vereinigungsmenge: Elemente entweder in M oder N
  $\rightarrow M = [0; 3], N = [2; 5] \rightarrow M \cup N = [0; 5]$
- $M \cap N$ → Schnittmenge zwischen M und N
  $\rightarrow M = [0; 3], N = [2; 5] \rightarrow M \cap N = [2; 3]$
- $N \backslash M$ → Elemente in N, die nicht in M sind
  $\rightarrow N = [0; 10], M = [2; 5] \rightarrow N \backslash M = [0; 2) \cup (5; 10]$
- $x \in M \rightarrow x$ ist Element der Menge M

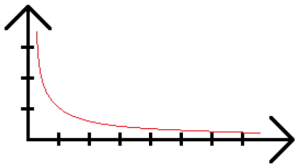


Funktionen

$f: x \to x$



$f: x \to \frac{1}{x}$



Funktion $f(x) = \frac{1}{x}; x \in M_1, f(x) \in M_2$
Funktionen bilden von einer Menge in andere Menge ab
z.B. hier: x könnte aus $\mathbb{N}$ kommen, dann ist $f(x)$ aber in $\mathbb{R}$
oder x bereits aus $\mathbb{R}$, dann $f(x)$ auch in $\mathbb{R}$

$f(x) = x \to M_1 = [0; 6] \to M_2 = [0; 6]$

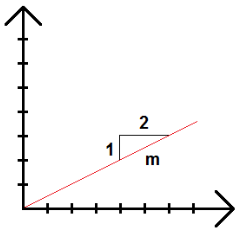
$f(x) = \frac{1}{x} \to M_1 = [0; 6] \to M_2 = [0.16, \infty)$

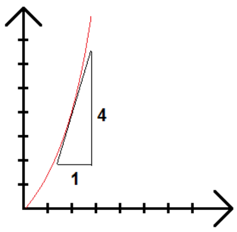
Oder $x \to 2x =: f(x)$
hier falls x aus $\mathbb{N}$, dann bildet $f(x)$ auch nach $\mathbb{N}$ ab

Oder: $x \to 0.5x =: f(x)$
hier falls x aus $\mathbb{N}$, dann $f(x)$ in $\mathbb{R}$, da 0.5 in $\mathbb{R}$

Plotten von $f(x) = 0.5x$ und parallel $f(x) = x^2$

- x, y Achsen $\to y = f(x)$
- dann Trendlinie dazwischen, linearer Anstieg, Steigungsdreieck





$m = \frac{1}{2} = 0.5$ $m = \frac{4}{1} = 4$

Links: Steigunstreieck an linearer Funktion ergibt Steigung von $f(x)$ über $f(x) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$
Rechts: Bei nichtlinearen Funktionen kann Steigungsdreieck lokal an x an der Tangente an der Funktion angelegt werden, die Steigung gilt nur lokal an x (hier 4)

Oder: Steigung ausrechnen über Funktionswertdifferenz Δy für Wertedifferenz Δx
$\to$ je kleiner Δx, desto genauer wird die Steigung bestimmt!

$m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ bzw $m = \frac{f(x+\Delta x) - f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

Ableitung $f'(x) = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x-\Delta x)}{2\Delta x}$

- $f'(x) > 0 \to$ positive Steigung an x
- $f'(x) < 0 \to$ negative Steigung an x
- $f'(x) = 0 \to$ waagerecht an x

- $f(2) = 1 \to$ Wert der linken Funktion an $x = 2$ ist 1
- $f'(2) = 0.5 \to$ Steigung der linken Funktion an $x = 2$ ist 0.5

Beispiel links:

$f(x) = 0.5x \to \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{0.5(x+\Delta x)-0.5x}{\Delta x} = 0.5$

Beispiel rechts:

$f(x) = x^2 \to \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} 2x + \Delta x = 2x \to f'(2) = 4$

Ableitung

$f(x)$ Funktion von x, oder kurz einfach f
$(f(x))'$ Ableitung von f, oder auch kurz f'
andere Notationen: $\frac{df}{dx}; \frac{d}{dx}f; f_x; d_x f; \dot{f}$

(Hinweis für später, wenn f nicht nur von x sondern von mehreren Variablen abhängt, unterscheidet man zwischen partiellen und totalen Ableitungen, kommt später in Vorlesung)

Ableitungsregeln

- $(x^n)' = n\,x^{n-1} \quad \to \quad (x)' = 1$
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- Später: trigonometrische Funktionen (sin, cos, …)
- $(c)' = 0$ für Konstante c (Konstantenregel)
- $(f \pm g)' = f' \pm g'$ (Additionsregel)
- $(fg)' = f'g + fg'$ (Produktregel, f und g hängen beide von x ab)
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ (Quotientenregel)
- $(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$ (Kettenregel, $f(g)$ wird auch geschrieben als $f \circ g$

Beispiel Weg, Geschwindigkeit, Beschleunigung

➔ Ich laufe konstant vom Bahnhof hierher, Strecke ist $x = 1$km in Zeit $t = 15$ min $= 0.25$ h

➔ Geschwindigkeit $v =$ Ableitung Weg nach Zeit $= \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1km}{0.25h} = 4\frac{km}{h}$

➔ Laufe mit konstanter Geschwindigkeit, zweite Ableitung ist Beschleunigung: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{0}{\Delta t} = 0$

➔ Auch an Tafel anzeichnen

Aufgaben:

Berechne Ableitungen:

- $(5x^4)' =$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' =$
- $(x^2 - x^{-3})' =$
- $(e^{2x})' =$
- $(e^{x\wedge 2})' =$
- $\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)' =$
- $(2x^2 - 4x + 10)' =$
- $(3\ln x + 2e^x)' =$
- $\left(\frac{1}{3x^2}\right)' =$
- $\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)' =$
- $\left(\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\right)' =$
- $\left(\sqrt{x}\right)' =$
- $(x^2 e^x)' =$
- $(x\ln x - x)' =$
- $((x^2+2)^4)' =$
- $\left(5e^{x^2}\right)' =$
- $(a^x)' =$
- $\left(5x - \frac{x}{a}\right)' =$
- $(10\ln(x) - x^{-1})' =$
- $(e^{3x+1})' =$
- $((5x^2-1)^3)' =$
- $((2+x)(2-x))' =$

Zusatzaufgaben:

- Bestimme Steigung der Tangente der Kurve ($y = -x$^2) an Punkt $(1{,}1)$
- $(\log_k x)' =$

Tag 3

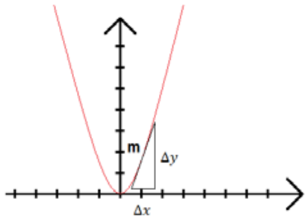
Integrale

Umkehrfunktion Ableitung

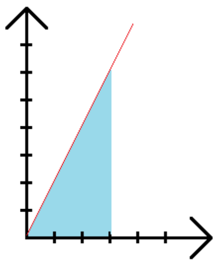
- $2x$ Ableitung ist von $x^2 \rightarrow x^2$ ist eine integrierte Funktion von $2x$
- Stammfunktion geschrieben als $F(x) = \int f(x)dx$ (dx wird benutzt ähnlich wie $\frac{d}{dx}$ für Ableitungen)

Bestimmtes Integral

Was bedeutet Integral geometrisch?
$\rightarrow$ wie war nochmal Ableitung definiert?



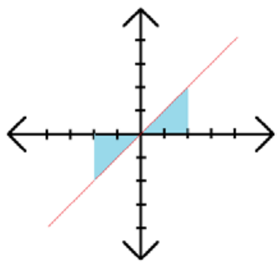
$$f(x) = x^2 \rightarrow \ m = \frac{\Delta x}{\Delta y} = f'(x) = 2x$$



Das bestimmte Integral auf Intervall $[a; b]$ entspricht der Fläche zwischen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse. Test:
$f(x) = 2x, A = \int_0^3 f(x)dx = F(x)|_0^3 = x^2|_0^3 = 9$
Rechnung über Dreiecksfläche:

$$A = \frac{1}{2}A_{Rechteck} = \frac{3 \cdot 6}{2} = \frac{18}{2} = 9$$

Fläche ist Summe von negativen und positiven Flächen, können sich aufheben!
Beispiel: $f(x) = x$ auf Intervall $[-2; 2]$



Was ist die Stammfunktion $F(x) =$?
$F(x)' = x \rightarrow$ mögliche Stammfunktion: $F(x) = \frac{1}{2}x^2$

$$\rightarrow \ A = \int_{-2}^{2} x = \frac{1}{2}x^2|_{-2}^2 = \frac{1}{2}(4-4) = 0$$

Aber Stammfunktion könnte auch anders sein, z.B.:

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1 \rightarrow F(x)' = x$$

Es gibt beliebig viele Stammfunktionen mit einer beliebigen Konstante C genannt Integrationskonstante:

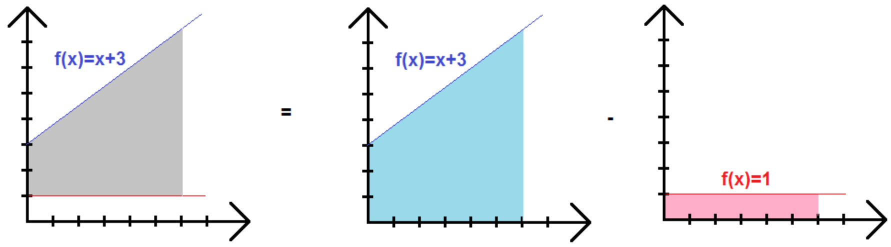
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + C$$

Unbestimmtes Integral

Unbestimmtes Integral (nicht auf bestimmtem Intervall) benötigt immer eine Integrationskonstante, z.B.:

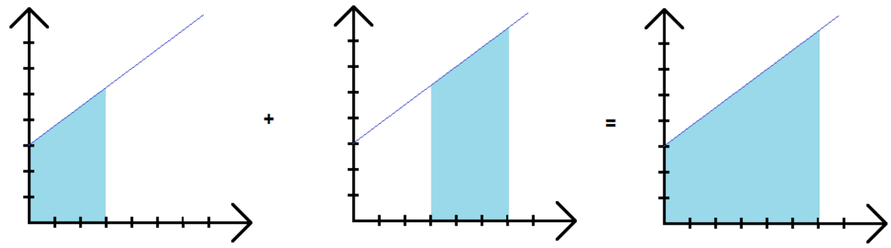
- $(x^2)' = 2x = (x^2 + 5)' \rightarrow \int 2x \, dx = x^2 + C$
- c kann bestimmt werden falls zusätzliche Information verfügbar, z.B. $f(0) = 2 \rightarrow$ für Beispiel $x^2 + C = 0$ für $x = 0 \rightarrow C = -2$

Frage: wie Fläche zwischen zwei Funktionen auf $[a; b]$ berechnen?



$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x) - g(x)\,dx$$

Frage: wie Summe zweier Flächen auf aneinandergrenzenden Intervallen berechnen?



$$\rightarrow \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

<u>Integrationsregeln</u>

- $(x^{a+1})' = (a+1)x^a \qquad \rightarrow \qquad \int x^a\,dx = \frac{1}{a+1}x^a + C$
- $(e^x)' = e^x \qquad \rightarrow \qquad \int e^x\,dx = e^x + C \quad / \quad \int e^{2x}\,dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$
- $(\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad \rightarrow \qquad \int x^{-1}\,dx = \ln x + C$

- $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = a\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f(x)\,dx$
- $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$

- $\int f \pm g\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$
- $\int af\,dx = a\int f\,dx$ für Konstante a
- $\int f \cdot g'\,dx = f \cdot g - \int f' \cdot g\,dx$

$\rightarrow$ Beispiel: $\int x \cdot e^x\,dx \rightarrow f = x, f' = 1, g' = e^x, g = e^x + C1$
$\rightarrow \int x \cdot e^x\,dx = x \cdot (e^x + C1) - \int (e^x + C1)\,dx = x(e^x + C1) - e^x - C1 \cdot x + C2$

<u>Beispiel:</u>

Unbestimmt: $\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C$

Bestimmt: $\int_0^1 x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + C|_0^1 = \frac{1}{4}$

Aufgaben

- $\int 1\, dx =$
- $\int e^{2x}\, dx =$
- $\int e^{1}\, dx =$
- $\int 4x^2\, dx =$
- $\int x^4 - 4x^3\, dx =$
- $\int \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\, dx =$
- $\int \sqrt{x}\, dx =$
- $\int \frac{x^2+1}{x}\, dx =$
- $\int e^{ax}\, dx =$
- $\int 5x^a\, dx =$
- $\int_2^4 2x\, dx =$
- $\int_0^4 3\, dx =$
- $\int_{-1}^{2} x^2 - 1\, dx =$
- $\int_2^5 \frac{x}{2} - 1\, dx =$
- $\int_0^a kx\, dx =$

Geometrie

Welche geometrische Formen kennen die Studenten? Rechteck, Dreieck, Quadrat, Würfel, Quader, Kreis, Kugel, Prisma, Tetraeder, ...
Formen von Dreiecken: gleichschenkliges Dreieck, spitzer und stumpfer Winkel etc.

Rechtecke und Quader

Rechteck:
- Seiten a, b
- Fläche $a \cdot b$
- Umfang $2a + 2b$

Quader:
- Seite a, b, c
- Oberfläche: $2(ab + ac + bc)$
- Volumen: $a \cdot b \cdot c$

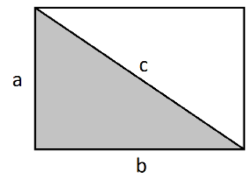
Würfel:
- Seite gleich lang, a
- Oberfläche: $6a^2$
- Volumen: a^3

Dreieck

Seiten a, b, c; gegenüberliegende Winkel α, β, γ

Umfang: $a + b + c$

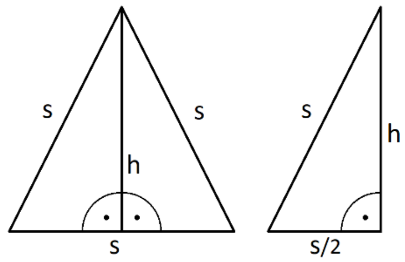
<u>Fläche *A*:</u>



1) wenn rechter Winkel
→ halbes Rechteck → a und b Katheten → $V = \frac{ab}{2}$

2) alle Winkel 60°, alle Seiten gleiche Länge s
→ Lot von Ecke auf Hypotenuse, dadurch 90° Winkel
→ $A = \frac{s \cdot h}{2}$; $h = ?$

- mehrere Möglichkeiten, z.B. trigonometrische Funktionen ($h = \sin 60°\, s = \frac{\sqrt{3}}{2} s$)
- oder: Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$
- $c = s, a = \frac{s}{2}, b = h = ? \rightarrow h^2 = s^2 - \frac{s^2}{4} = \frac{3}{4} s^2$
  $\rightarrow h = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} s$, hier positiv da keine negative
  Lotlänge möglich → $h = \frac{\sqrt{3}}{2} s$
- Fläche $A = \frac{sh}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ s^2



3) beliebige Winkel → später

- Winkel in Grad üblich für Dreieck und Viereck
- Winkel in Bogeneinheit üblich für Kreis und Kugel

Summe Winkel in Dreieck (180°) und Viereck (360°)

<u>Exkurs: Hochzusammengesetzten Zahlen</u>

Warum 24h, 60 min, 360°? Die "praktischsten Zahlen"
(siehe auch http://www.brefeld.homepage.t-online.de/teilbarkeit.html)

24,60,360 haben je besonders viele Teiler:
- 24 = 1,2,3,4,6,8,12,24
- 60 = 1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60
- 360 = 1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,18,20,24,30,36,40,45,60,72,90,120,180,360

→ praktische Zahlen da gut einteilbar
→ mehr Teiler als Zahlen die weniger als doppelt so groß sind

Kreis und Kugel

Kreis:

- Radius r
- Bogenwinkel in rad (Radiant), $2\pi\ rad$ → Vollkreis
- Fläche: πr^2
- Umfang: $2\pi r$

Kugel:

- Oberfläche: $4\pi r^2$
- Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$
- z.B. für Dichte von der Erde / anderen Planeten; globale Wärmeflüsse

Exkurs:

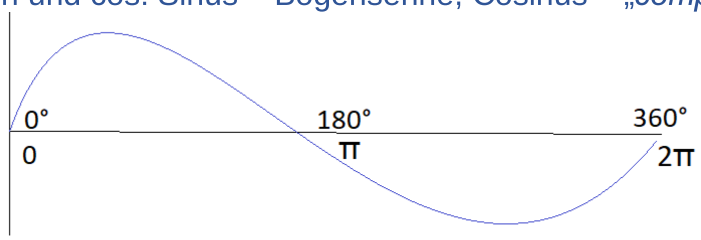
Umfang und Fläche / Fläche und Volumen
Fläche ist Ableitung vom Volumen!

Kreis und Kugel:
Gilt nur (!) wenn mit Erhöhen der Strecke (z.B. r) der Körper in alle Richtungen vergrößert wird.
→ Fläche Kreis = πr^2, Umfang = $2\pi r$
→ Volumen Kugel = $\frac{4}{3}\pi r^3$, Oberfläche = $4\pi r^2$

Rechteck/Würfel:
→ Volumen Rechteck, Seitenlänge gleich = a^2, Umfang = $4a \neq V'$ weil a den Körper nur in zwei/drei Richtungen verlängert
→ Volumen Würfel = a^3, Fläche = $6a^2 \neq V'$
Aber: $r \coloneqq \frac{a}{2}$
→ $V = a^2 = (2r)^2 = 4r^2,\ V' = 8r$, Umfang: $4a = 8r$
→ $V = a^3 = (2r)^3 = 8r^3,\ V' = 24r^2$, Oberfläche: $6a^2 = 6(2r)^2 = 24r^2$

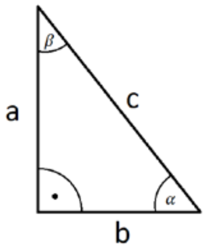
Trigonometrische Funktionen

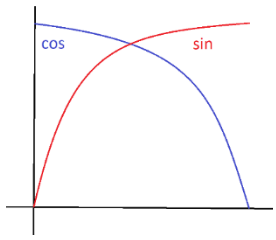
- sin und cos: Sinus = Bogensehne, Cosinus = *„complementi sinus“*



- Definiert entweder im Dreieck (Winkel in °) oder im Kreis (Winkel in Bogeneinheiten, Polarkoordinaten, später)
- Dreieck mit rechtem Winkel, andere Winkel α (gegenüber Seite a) und β (gegenüber Seite b), Hypotenuse ist c, Winkel entgegen Uhrzeigersinn

- $0 < \alpha < 90° \rightarrow c \sin\alpha = a =$ Länge Gegenkathete
  (Trick Winkel klein dann GK geht gegen null);
  $c\cos(\alpha) = b =$ Ankathete
- Summe Winkel immer gleich 180°,
  $\alpha + \beta = 90° \rightarrow \cos(\alpha) = \sin(\beta)$

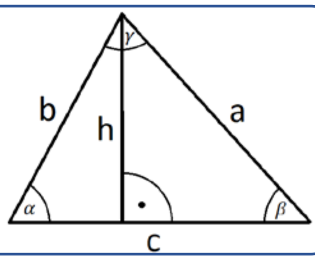




- was ist Hypotenuse wenn Katheten bekannt? wie berechnen? Satz des Pythagoras: $c^2 = a^2 + b^2$
- Weiter umformen: $c^2 = c^2\sin(\alpha)^2 + c^2\cos(\alpha)^2 = c^2(\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2)$
  $\rightarrow$ deswegen immer $\sin^2 + \cos^2 = 1$!!!

<u>Fläche von beliebigem Dreieck:</u>

- Lot auf Grundseite c
- Fläche über halbes Rechteck
- h über Sinus: $h = b\sin(\alpha) = a\sin(\beta)$
- Fläche: $\frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$

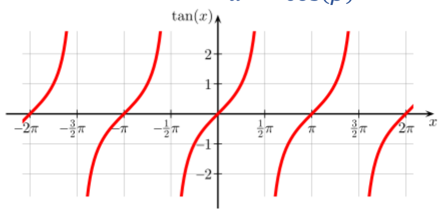


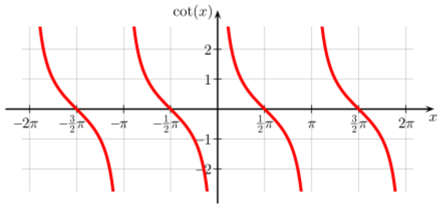
<u>Tangens</u>

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Definition im Dreieck:

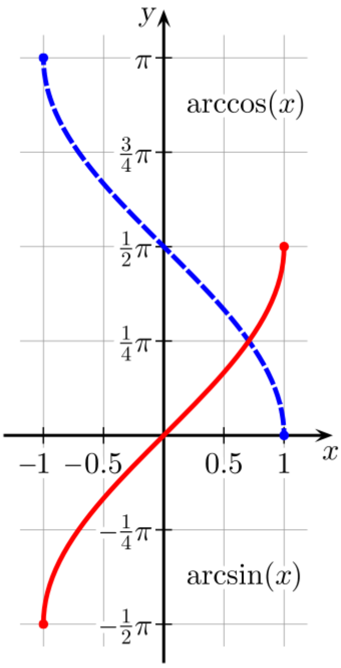
- $\tan$ = Gegenkathete / Ankathete
- $\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
- $\tan(\beta) = \frac{b}{a} = \frac{\sin(\beta)}{\cos(\beta)}$

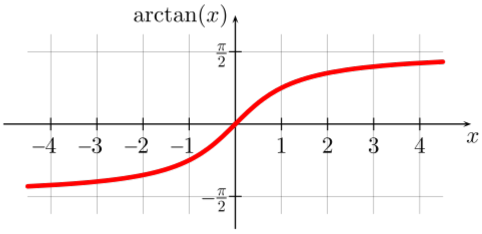


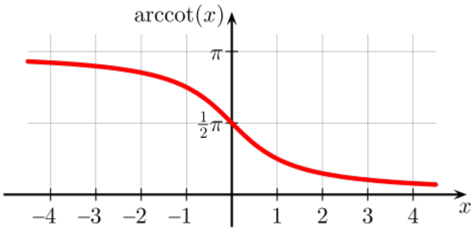


Cotangens = "*complementi tangens*"

- $\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
- nicht verwechseln mit Arkustangens ($\arctan/\mathrm{atan}/\tan^{-1}$)
- $\tan(x) = y \rightarrow x = \arctan(y)$
- genauso gibt es: $\arcsin/\arccos/\mathrm{arccot}$







Sinus und Cosinus:

- regelmäßig auf 2π Intervall
- Schnittpunkte bei Vielfachen von: $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$:
    - Sinus: $0,1,0,-1$
    - Cosinus: $1,0,-1,0$
- $\sin(x) = -\sin(-x)$
- $\cos(x) = \cos(-x)$
- $\tan(x) = -\tan(-x)$

Integration und Ableitung von trigonometrischen Funktionen

- $(\sin(x))' = \cos(x)$
- $(\cos(x))' = -\sin(x)$
- $(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$
- $(\cot(x))' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = \frac{-\sin(x)\sin(x) - \cos(x)\cos(x)}{\sin(x)^2} = -\frac{1}{\sin(x)^2}$

Tag 4

Gleichungen aufstellen und lösen

Gleichungen umstellen (lineare Gleichungen):

- $x + 3 = 7 \rightarrow$ subtrahiere von beiden Seiten $3 \rightarrow x = 7 - 3 = 4$
- $3x = 6 \mid \div 3 \rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$
- $2x + 1 = 5 \mid -1 \rightarrow 2x = 4 \mid \div 2 \rightarrow x = 2$
- $2x - 3 = 5x + 7 \mid -2x + 3 \rightarrow -10 = 3x \rightarrow x = -\frac{10}{3}$

Gleichungen umstellen (nichtlineare / quadratische Gleichungen):

- $x^2 = 9 \;|\sqrt{\cdot} \;\leftrightarrow\; x = \pm 3$ (kann auch geschrieben werden als $x \in \{-3; 3\}$)
- $\sqrt{x} - 4 = 0 \mid +4 \;\leftrightarrow\; \sqrt{x} = 4 \;|(\cdot)^2 \;\leftrightarrow\; x = 16$
- $x^2 + px + q = 0$
  - (1) $x^2 + q = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{-q} \rightarrow \; x \in \{-q; q\}$
  - (2) $x^2 + px = 0 \rightarrow$ a) $x = 0$, b) $x = -p \;\rightarrow\; x \in \{-p; 0\}$
  - (3) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$
  - (4) $ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a}$
- $0 = x^2 - 2x - 3 = (x+1)(x-3)$ or $x = 1 \pm \sqrt{1+3} \;\rightarrow\; x \in \{-1; 3\}$

Aufgaben

- $5x - 1 = 9 \rightarrow x =$
- $\frac{x}{2} + 2 = 0 \rightarrow \; x =$
- $x^2 = 4 \rightarrow x =$
- $3x^2 - 15 = 0 \rightarrow x =$
- $5x^2 - 10x = 0 \rightarrow x =$
- $ax + 7 = 3x - b \rightarrow x =$
- $(x-3)^2 + 3x^2 = (2x+7)^2 \rightarrow \; x =$
- $\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{3}{2+3x} \rightarrow x =$

Funktionen Schnittstelle a bestimmen

- $f(x) = x + 3$
  $f(a) = 1 \Leftrightarrow a + 3 = 1 \Leftrightarrow a = -2$
- $f(x) = \sin(x)$
  $f(a) = 1, a \in [0{,}2\pi) \Leftrightarrow \sin(a) = 1 \Leftrightarrow a = \arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$

Aufgaben

- $f(x) = \sqrt{x} + 2$
  $f(a) = 3 \Leftrightarrow a =$
- $f(x) = x^2$
  $f(a) = 4 \Leftrightarrow a =$
- $f(x) = x^2 + x$
  $f(a) = 1 \Leftrightarrow a =$

Sachaufgaben Dreisatz (Verhältnisgleichung)

1) Ein Tag hat 24 Stunden, wie viele Stunden haben 7 Tage?
$\rightarrow 1d : 24h = 7d : x \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{24} = \frac{7}{x} \Leftrightarrow x = 7 \cdot 24h = 168h$

2) Ein Lichtjahr ly reicht ungefähr $10^{14}\ km$ weit. Nach wie vielen Jahren erreicht man mit Lichtgeschwindigkeit eine Entfernung von $10^{15}\ km$?
$\rightarrow 1\ ly : 10^{14}\ km = x : 10^{15}\ km \Leftrightarrow x = 10\ ly$

3) 3 Stunden sind 180 min, wie viele Stunden sind nach 600 min verstrichen? Wie viele Minuten nach 7 Stunden?
$\rightarrow 3\ h : 180\ min = x : 600\ min \Leftrightarrow x = \frac{1800\ h \cdot min}{180\ min} = 10\ h$
$\rightarrow 3\ h : 180\ min = 7\ h : x \Leftrightarrow x = \frac{7\ h \cdot 180\ min}{3h} = 7 \cdot 60\ min = 420\ min$

Aufgaben

1) Ein Drucker druckt 600 Seiten in 12 Minuten. Wie lange braucht er für 900 Seiten? Wie viele Seiten druckt er in 15 Minuten?

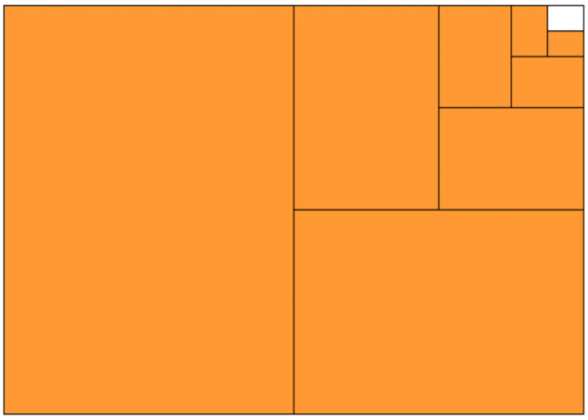
2) Im Supermarkt gibt es Rindfleisch im Angebot: $700\ g$ Rindfleisch kosten $8{,}40$€. Wie teuer ist der Kilopreis? Wie viel Fleisch bekomme ich für 30€?

3) Eine Hausarbeit wird von drei Studenten gemeinsam in 7 Tagen bearbeitet. Wie lange benötigen dann zwei Studenten für die gleiche Arbeit?

4) 2 Kühe fressen während 1 Tages $48\ kg$ Gras. Wie viele kg fressen 5 Kühe in 6 Stunden?

5) 6 Studenten reinigen den Laborraum innerhalb von 3 Stunden. Wie lange bräuchte ein Student dafür?

6) DIN Papier



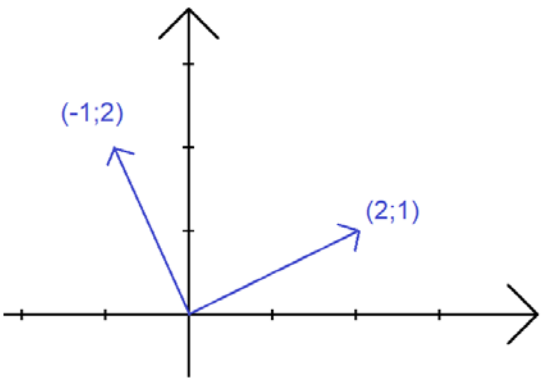
Wie ist das Verhältnis der jeweils längeren zur kürzeren Seite?

Vektoren und Matrizen

Beispiele in Geologischen Wissenschaften: Spannungstensoren, Gravitationsvektor

Vektoren

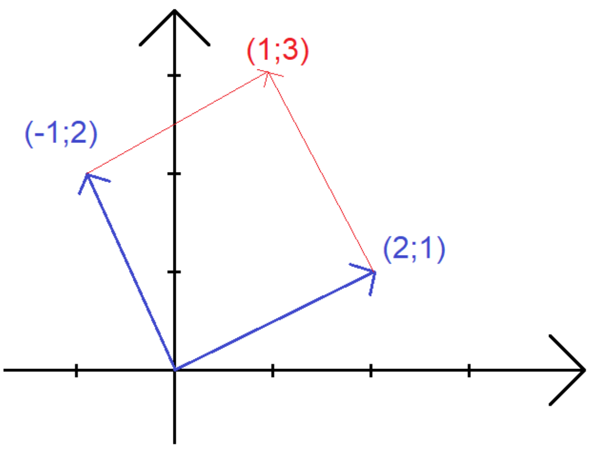
- $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – n-dimensionaler Vektor
- Schreibweise: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = (v_x \quad v_y)^T = (v_x, v_y)$
- Vektor $\vec{v}$ hat bestimmte Länge (Betrag) $|\vec{v}|$ in eine bestimmte Richtung
- im Koordinatensystem: Vektor entspricht Verschiebung vom Koordinatenursprung



→ unterschiedliche Richtung, aber Länge ist gleich

Wie wird der Betrag berechnet? → Pythagoras

- $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ → im Beispiel je $\sqrt{5}$
- geht auch in mehreren Dimensionen, z.B. 3D: $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \vec{v} \cdot \vec{v}$
    - Beispiel: $|(2 \ -1 \ \ 3)^T| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14} = 3.74$
- Vektoren mit Betrag = 1 nennt man Einheitsvektoren
    - Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\overrightarrow{e_x}$



Addition der Vektoren (2 1) und (-1 2) ergibt (1 3)

Regeln

Addition/Subtraktion:

$$\vec{v}+\vec{w}=\begin{pmatrix} v_x+w_x \\ v_y+w_y \\ v_z+w_z \end{pmatrix}; \qquad \vec{v}-\vec{w}=\begin{pmatrix} v_x-w_x \\ v_y-w_y \\ v_z-w_z \end{pmatrix}$$

Assoziativgesetz:

$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$$

Kommutativgesetz:

$$\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$$

Multiplikation mit Skalaren:

$$a\,\vec{v}=\begin{pmatrix} a\,v_x \\ a\,v_y \\ a\,v_z \end{pmatrix}=\vec{v}\,a$$

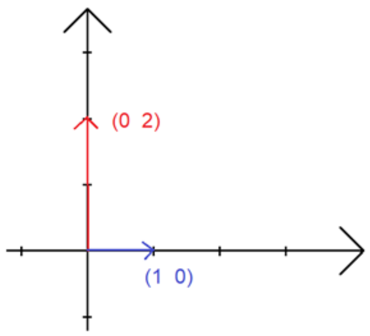
Multiplikationen von Vektoren

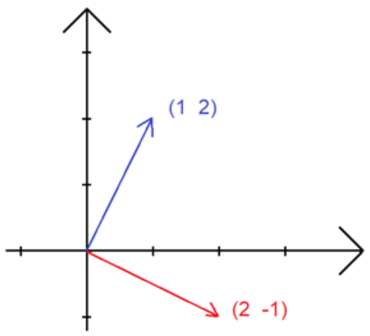
- Skalarprodukt: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{v}\vec{w}=v_xw_x+v_yw_y+v_zw_z$
  andere Definition: $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|\cos\alpha(\vec{v},\vec{w})$
  → gleiche Richtung (Orientierung): $\vec{v}\cdot\vec{w}=|\vec{v}|\cdot|\vec{w}|$
  → senkrecht aufeinander: $\vec{v}\cdot\vec{w}=0$ → Vektoren sind orthogonal zueinander

- Regeln Skalarprodukt:
  Kommutativgesetz: $\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$
  Multiplikation mit Skalar: $a\,(\vec{v}\cdot\vec{w})=(a\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(a\vec{w})$
  Distributivgesetz: $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ und $(\vec{u}+\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}$
  ABER: nicht assoziativ: $(\vec{u}\cdot\vec{v})\cdot\vec{w}\;\neq\;\vec{u}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{w})$
  Beispiel: $\left[\binom{1}{2}\cdot\binom{2}{0}\right]\binom{1}{0}=\binom{2}{0}$; $\binom{1}{2}\left[\binom{2}{0}\cdot\binom{1}{0}\right]=\binom{2}{4}$

Beispiel Skalarprodukt:

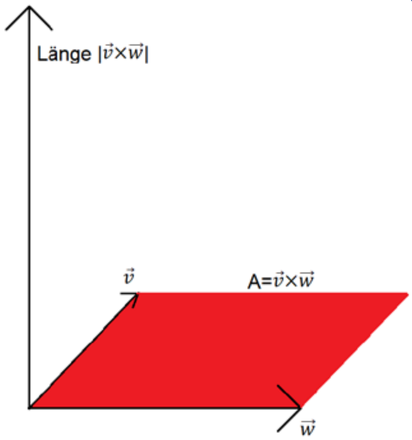
$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}=0$ → Vektoren senkrecht zueinander!





Links: $\binom{1}{0}\cdot\binom{0}{2}=0$ Rechts: : $\binom{2}{-1}\cdot\binom{1}{2}=2-2=0$

Kreuzprodukt: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$



- $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w}$ -> $\vec{u}$ senkrecht auf Ebene, die von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird
- Länge von $\vec{u}$ entspricht Fläche des Parallelogramms von $\vec{v}$ und $\vec{w}$
- Beispiel: $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} => A = 8$

  $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$

Regeln Kreuzprodukt:

- $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- nicht assoziativ, d.h. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Aufgaben

- $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} =$
- $\left|\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| =$
- $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}\right| =$
- $\left|\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}\right| =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} =$

Matrizen

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ – n-dimensionaler Vektor, definiert für m×n Einträge
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \to m$ Zeilen und n Spalten, hier 2×3 Matrix
- $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$ Transponierte Matrix
- Vektoren sind $n \times 1$ Matrizen
- Wenn quadratische Matrix ($n \times n$), dann Diagonale: $(a_{11}\ \ a_{22} \ldots a_{nn})$
- Spur = $\sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$

- Addition/Subtraktion nur wenn gleiche Größe, dann Eintrag für Eintrag ausrechnen
- Multiplikation von Matrizen anders als bei Vektoren
- wenn Matrix A $m \times n$ Einträge, dann für $A \cdot B$: B muss $n \times k$ Einträge haben, Ergebnis hat dann $m \times k$ Einträge

Beispiel: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 4 \\ 3 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$

Regeln

- Skalarmultiplikation: $cA = Ac$, alle Matrixelemente werden mit c multipliziert
- nicht kommutativ: $A \cdot B \neq B \cdot A$ (leicht vorstellbar für $A(m \times n)$ und $B(n \times m) \to$ Matrixprodukt hat verschiedene Dimensionen $m \times m$ vs. $n \times n$
- Assoziativgesetz: $(AB)C = A(BC)$
- Distributivgesetz: $(A + B)C = AC + BC$; $A(B + C) = AB + AC$
- Inverse Matrix: Falls A quadratisch und det(A) ungleich Null (Determinante später), dann: $A\,A^{-1} = A^{-1}\,A = E$ Einheitsmatrix

Determinante

- Determinante Äquivalent zu Betrag beim Vektor
- Falls Determinante 0, dann ist Matrix nicht invertierbar
- det A:
  1D: $A = (a_{11}) \to \det A = |a_{11}| = a_{11}$
  2D: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \to \det A = a_{11}\,a_{22} - a_{12}a_{21}$
  3D: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$
  $\to \det A = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
  $\to$ entweder entlang einer beliebigen Spalte oder Zeile entwickeln
  $\to$ oder: schreibe erste zwei Zeilen unter Matrix:

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Aufgaben (weggelassen da keine Zeit)

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} =$
- Bestimme die Determinante der drei Matrizen

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$
- Bestimme die Determinante der drei Matrizen

Schnelles Beispiel (Zeilenentwicklung):

- $det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4$

Vorzeichen Zeilen/Spaltenentwicklung:

- $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$

→ Beispiel davor, Entwicklung nach zweiter Spalte:

- $det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - 0 \cdot det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -4$

Aufgaben

- $det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$
- $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$

Tag 5

Wiederholung: Vereinfachen, Umformen

Brüche

- $\frac{27}{6} =$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} =$
- $-\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{5} =$
- $\frac{2/3}{3/4} =$
- $\frac{a}{2} + \frac{2}{3} =$
- $\frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) =$

Potenzen

- $\frac{2^a}{5^a} =$
- $3^4 \cdot 9^2 =$
- $3^5 - a^5 =$
- $b^3 \cdot (2b)^4 =$
- $-2^3(a^3 - 2^2) =$
- $3^7 \cdot 2^7 \cdot 6^2 =$
- $5^a \cdot 5^{-3} =$
- $-3^a(2^a + 3^a) =$
- $3^2 \cdot 3^{-2} =$
- $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 =$
- $\frac{1-4x^2}{2x+1} =$

Wurzeln

- $\sqrt{4} + \sqrt{2} =$
- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} =$
- $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$
- $3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} =$
- $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} =$
- $3\sqrt{2} - \sqrt{18} =$
- $\sqrt{3^2 + 4^2} =$

Ableitungen

- $(3x^3)' =$
- $((2x+1)^2)' =$
- $\left(e^{-x^2}\right)' =$
- $(x^3(1+x))' =$
- $(2\cos(x))' =$
- $(\cos(x)\sin(x))' =$
- $\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)' =$
- $\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)' =$

Integrationen

- $\int 5x \; dx =$
- $\int \cos(x) \; dx =$
- $\int_0^1 x^2 \, dx =$
- $\int 2x \cdot e^{x^2} \; dx =$
- $\int \frac{k}{x} \, dx =$
- $\int_{-1}^{1} 1 - 2x \, dx =$
- $\int 5\sin(x) \; dx =$
- $\int 2\sin(x)\cos(x) \; dx =$

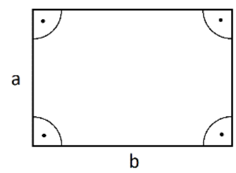
Gleichungen lösen

- $5x - 2 = 2x + 7 \to x =$
- $x^2 + 2x - 3 = 2(x+3) \to x =$
- $2x^2 + 3x - 2 = 0 \to \; x =$
- $f(x) = \ln(x)$
  $f(a) = 0 \to a =$
- $f(x) = 2x(x-2)$
  $f(a) = 0 \to a =$
- $f(x) = 2\;\log_5(x)$
  $a = 10 \to a =$

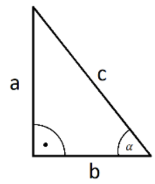
Vektoren

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} =$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} =$
- $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \qquad \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| =$

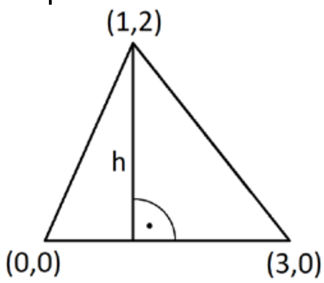
Geometrie (weggelassen da keine Zeit)



- Rechteck mit Seiten a, b
  - Fläche $A = ? = ab$
    Umfang $U = ? = 2(a+b)$
- Dreieck mit rechtem Winkel gegenüber c
  - Fläche $A = ? = \frac{ab}{2}$
  - Winkel $\alpha = ? \rightarrow \sin\alpha = \frac{a}{c} \rightarrow\ \alpha = \sin^{-1}\frac{a}{c} \in (0°, 90°)$



Beispiel Vektoren für Flächenbestimmung:



- Fläche über Geometrie: $h = 2;\ A = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$
- Fläche über Kreuzprodukt der Vektoren:
  $$A = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}\right| = \frac{6}{2} = 3$$

Beispiele aus Alltag, mit Mathe lösbar und Mathespiele:

Fliesen (weggelassen da keine Zeit)
Wie viele Fliesen brauche ich um mein Bad zu fliesen (ohne Decke)?
→ $4 \times 6m^2$ Zimmer, Fliesenhöhe soll $3m$ sein; 10 Fliesen benötigt für einen m^2
→ Grundfläche: 4×6, zwei Seiten längs: 4×3, zwei Seiten quer: 6×3
$= 4 \times 6 + 2 \times (4 \times 3 + 6 \times 3) = 4 \times 6 + 2 \times 10 \times 3 = 24 + 60 = 84$
→ 840 Fliesen

Wer wird Millionär:
"Aus insgesamt wie vielen Steinchen besteht der klassische von Ernö Rubik erfundene Zauberwürfel?"
- A: 22
- B: 24
- **C: 26**
- D: 28

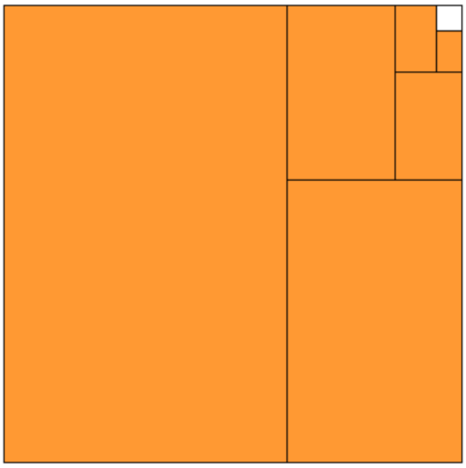
→ $9 + 8 + 9 = 26$ (Millionenfrage(!) Dezember 2015)

Ähnliche Fragen:
- Wie viele kleine Außenflächen hat der Rubik Würfel?
  → $6 \times 9 = 54$
- Wie viele kleine Außenkanten hat der Rubik Würfel?
  → 4×3 an den Seiten + 4×3 oben + 4×3 unten $= 3 \times 4 \times 3 = 4 \times 9 = 36$

Lotto (weggelassen da keine Zeit)
Ziehe 6 Zahlen aus 49
- Erster Test: $49^6 = 13{,}841{,}287{,}201$ → $1{:}\,14$ Milliarden
- Aber: Eine Kugel kann nicht zweimal gezogen werden („ohne Zurücklegen“)
  → $\frac{1}{49} \times \frac{1}{48} \times \frac{1}{47} \times \frac{1}{46} \times \frac{1}{45} \times \frac{1}{44} \rightarrow 1 : \frac{49!}{(49-6)!} = 1{:}\,10{,}068{,}347{,}520 \rightarrow 1{:}\,10$ Milliarden
- Aber: Reihenfolge der Ziehung ist nicht wichtig
  → Chancen sind: $\frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{36} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} \rightarrow 1{:}\frac{49!}{6!(49-6)!} = 1{:}\binom{49}{6}$
  (mit Binomialkoeffizient $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$)
  Chancen Lotto 6 Richtige: → $1{:}\binom{49}{6} = 1{:}\,13{,}983{,}816 = 1{:}\,14$ Millionen

Vernetzung (weggelassen da keine Zeit)
Ich kenne jeden Menschen über sieben Ecken, wie viele Personen müssen sich dafür durchschnittlich je direkt kennen ohne Überlappung (sprich ich kenne die Freunde meiner Freunde nicht, und sie kennen sich untereinander auch nicht)?
→ ich kenne n Personen, jeder dieser kennt inkl. mir n Personen, so 5x weiter
→ ich kenne $n \cdot n^7$ Personen über 7 Ecken
→ n^8 Personen
Auf der Erde leben 6 Millionen Menschen
→ $n = \sqrt[8]{6 \cdot 10^9} = \sqrt{\sqrt{\sqrt{6 \cdot 10^9}}} = 16.7$
→ Wenn jeder Mensch 16-17 Bekannte hat, die sich je alle nicht untereinander kennen, kenne ich jeden Menschen auf der Erde über maximal sieben Ecken!

Goldener Schnitt (weggelassen da keine Zeit)



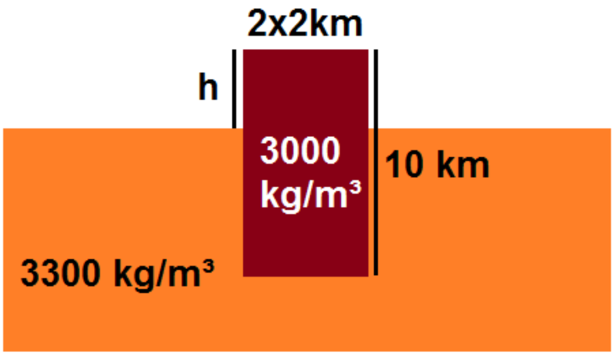
Was ist das Verhältnis der länggeren zur kürzeren Seite?
→ erstes Rechteck Seiten a (längere Seite) und b
→ nächst kleineres Rechteck: $a' = b, b' = a - a'$
→ Verhältnis $x = \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{b}{a-b}$
→ $\frac{a}{b} = \frac{b}{a-b} \leftrightarrow a(a-b) = b^2 \leftrightarrow 0 = a^2 - ab - b^2$
→ $a = \frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} + b^2} = b\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1.618b$

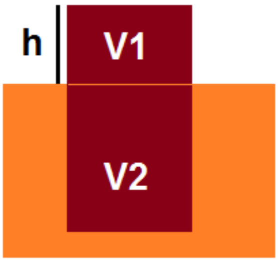
Verhältnis: Goldener Schnitt

Beispiele relevant für geologische Wissenschaften:

Isostasie:

Masse des Blocks muss Masse des verdrängten Materials entsprechen
→ Wie hoch steht der Block über der Manteloberfläche?





- $M_{verdrängt} = V_2 * 3300\ \frac{kg}{m^3} = (10km - h) * A * 3300\ \frac{kg}{m^3}$
- $M_{Block} = (V_1 + V_2) * 3000\ \frac{kg}{m^3} = 10km * A * 3000\ \frac{kg}{m^3}$
- $V_1 = h * A;\ V_2 = (10km - h) * A$
- $h * A * 3300\ \frac{kg}{m^3} = 10km * A * 3300\ \frac{kg}{m^3} - 10km * A * 3000\ \frac{kg}{m^3}$
- $h * 330\ \frac{kg}{m^3} = 3300\ \frac{kg}{m^3} - 3000\ \frac{kg}{m^3}$
- $h[km] = 300\ \frac{kg}{m^3} / 330\ \frac{kg}{m^3} \approx 0.9$

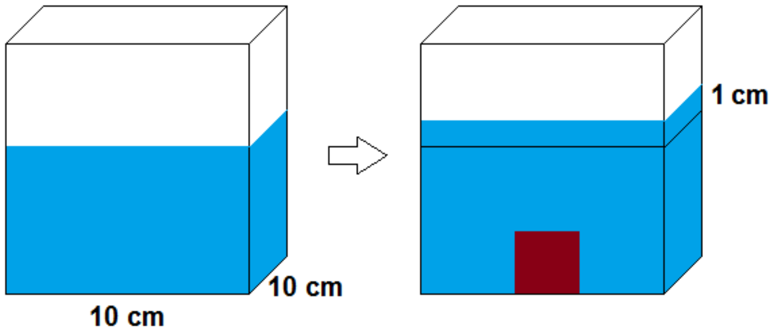
Und für geringere Dichte vom Block 2000 $\frac{kg}{m^3}$:

- $h[km] = 1300\ \frac{kg}{m^3} / 330\ \frac{kg}{m^3} \approx 3.9$

„Heureka“:

Altgriechisch für „Ich hab es gefunden“

- Entdeckung des Archimedischen Prinzips
- Vor über 2000 Jahren wollte König Hieron II wissen, ob seine Krone aus Gold oder einem billigeren, leichteren Material hergestellt wurde
- Archimedes wurde damit beauftragt, aber er durfte die Krone nicht zerstören
  → Wiegen (Masse) kein Problem, aber was ist das Volumen?
  → Beim Baden: die Menge die ein Körper verdrängt, ist genau das Volumen im Wasser, um das sich der Wasserstand erhöht (Höhe Wasserspiegeländerung multipliziert mit Fläche Wanne)
  → Archimedes fand heraus, dass ein Goldbarren mit dem gleichen Gewicht wie die Krone weniger Wasser verdrängte als die Krone
  → Die Krone bestand aus einem Material geringerer Dichte, also nicht aus Gold!



→ Was ist das Volumen des Goldbarrens im Wassergefäß?

$$V = 1cm * 10cm * 10cm = 100cm^3$$

→ Der Barren hat die Masse $1{,}93\ kg$, was ist die Dichte des Barrens? Gold hat eine Dichte von $19300\,\frac{kg}{m^3} = 19{,}3\,\frac{g}{cm^3}$ → besteht der Barren aus Gold?

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{1930\ g}{100\ cm^3} = 19{,}3\,\frac{g}{cm^3}$$ → Ja!

Radiokarbonmethode (weggelassen da keine Zeit)

Alter von Gesteinen/Fossilien bestimmen:
Es gibt drei Kohlenstoff Isotope: ^{12}C, ^{13}C und ^{14}C, letzteres ist instabil und zerfällt in
$^{14}C \rightarrow {}^{14}N + e^-$

1) Nach wie vielen Jahren ist Hälfte der ^{14}C Isotopen zerfallen?
Halbwertszeit ist: λ_{14C}=1,21 * 10^{-4} yr^{-1}

- ➔ 0.5 = exp(-λ_{14C} * t)
- ➔ ln (0.5) = -λ_{14C} * t
- ➔ t = - ln(0.5)/ λ_{14C} = 5730 Jahre

Luft besteht heute aus 98,89% ^{12}C, 1,11% ^{13}C und 10^{-10} % ^{14}C
Leben nimmt ^{14}C Kohlenstoff auf, wenn es abstirbt, sinkt der Anteil da das Isotop mit der Zeit zerfällt

- ➔ Alter entspricht Todeszeitpunkt der Fossilien
- ➔ z.B. Alter von Muscheln bestimmbar

$$\left(\frac{^{14}C}{^{12}C}\right) = \left(\frac{^{14}C}{^{12}C}\right)_{Luft} \cdot e^{-\lambda_{14C} \cdot t[yr]}$$

Luft heute:

$$\left(\frac{^{14}C}{^{12}C}\right)_{Luft} = \left(\frac{10^{-10}\%}{98,89\%}\right)$$

Probe Boden: ^{14}C := 10^{-11} %

$$\rightarrow \left(\frac{10^{-11}\%}{98,89\%}\right) = \left(\frac{10^{-10}\%}{98,89\%}\right) \cdot e^{-\lambda_{14C} \cdot t[yr]}$$

$$\rightarrow 0,1 = e^{-0,000121 \cdot t[yr]}$$

$$\rightarrow \ln(0,1) = -0,000121 \cdot t[yr]$$

$$\rightarrow t[yr] = -\frac{\ln(0,1)}{0.000121} = 19030\, yr$$

Lösungen

Einfaches Rechnen

- $\frac{5}{3}+\frac{1}{6}=\frac{11}{6}$
- $\frac{7}{4}-\frac{1}{4}=\frac{3}{2}$
- $\frac{7/11}{3/22}=\frac{14}{3}$
- $\frac{1}{5/7}=\frac{7}{5}$
- $\frac{8}{3}-\frac{3}{9/8}=0$
- $\frac{5}{2}-\frac{2}{5}=\frac{25}{10}-\frac{4}{10}=\frac{21}{10}$
- $\frac{3}{6/7}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$
- $\frac{8}{3+1}=2$
- $\frac{8}{3}-\frac{2}{6}-\frac{3}{9}=\frac{24-3-3}{9}=2$ oder $=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=2$
- $\frac{5}{2}+3=\frac{11}{2}$
- $\frac{a}{a^2}=\frac{1}{a}$
- $\frac{ab}{b}=a$
- $\frac{2a+4ab}{2a}=1+2b$
- $\frac{2}{a}+\frac{a}{2}=\frac{4}{2a}+\frac{a^2}{2a}=\frac{4+a^2}{2a}$
- $5+\frac{3}{a}=\frac{5a+3}{a}$
- $\frac{a+1}{a}\rightarrow$ keine Änderung
- $\frac{2}{3a}-\frac{3}{a}=\frac{2-9}{3a}=-\frac{7}{3a}$

Klammern streichen:

- $(5+3)-2=5+3-2$
- $(3\cdot 4)\cdot 5+3=3\cdot 4\cdot 5+3$
- $\frac{3}{8}\cdot(2+7)=\frac{3(2+7)}{8}=3\,\frac{2+7}{8}$ (Notiz: " · " vor Klammern und Brüchen kann weg)
- $\frac{(3-(4\cdot 6))}{(2-5)}=\frac{3-4\cdot 6}{2-5}$
- $3\left(\frac{2+3}{8}+(5-2)\right)=3\left(\frac{2+3}{8}+5-2\right)$
- $7-(3-5)=7-(3-5)=7-3+5$
- $2-(8+3)\cdot 2\rightarrow$ keine Änderung
- $\frac{(8-2)}{3}=\frac{8-2}{3}$

Ausklammern / Klammern ausmultiplizieren:

- $\frac{5}{7}+\frac{6}{7}=(5+6)\cdot\frac{1}{7}=\frac{11}{7}$
- $4\sqrt{3}-c\sqrt{3}=(4-c)\sqrt{3}$
- $\frac{a^2-1}{a+1}=\frac{(a-1)(a+1)}{a+1}=a-1$
- $3+6x-9x^2=3(1+2x-3x^2)=3(1+3x)(1-x)$
- $a^2-2ax+x^2=(a-x)^2$

- $\frac{x}{2} - (2+x)x = x(0.5 - 2 - x)$
- $(5+x)(2-b) = 10 - 5b + 2x - bx$
- $(3-x)(3+x) = 9 - x^2$
- $\frac{x}{3}\left(\frac{9}{2} - \frac{6}{x}\right) = \frac{3x}{2} - 2$
- $\frac{3x^2-5x+2}{3x-2} = x + 1$
- $\frac{5}{2}(4x - 12 + 8x) = \frac{5}{2}(12x - 12) = 30(x-1)$
- $-\frac{2+4x}{1-2x} = -2\frac{1+2x}{1-2x}$
- $3 - \frac{4\cdot 6-2}{2} = 3 - \frac{22}{2} = 3 - 11 = -8$
- $5x - 15x^2 = 5x(1-3x)$
- $\frac{25-4a^2}{5+2a} = \frac{(5-2a)(5+2a)}{5+2a} = 5 - 2a$
- $3 - \left(\frac{8}{3} + \frac{3}{9}\right) = 3 - \left(\frac{9}{3}\right) = 0$
- $7\left(2 - \frac{5}{14}\right) = \frac{7(28-5)}{14} = \frac{23}{2}$
- $\frac{5-a}{3-a} \rightarrow$ keine Änderung
- $\frac{3\sqrt{5}+a\sqrt{5}}{3} = \sqrt{5}\frac{(3+a)}{3}$
- $20 - 4x + 16x^2 = 4(4x^2 - x + 5)$
- $\frac{2a}{3a^2} - \frac{1}{a} = \frac{2}{3a} - \frac{3}{3a} = -\frac{1}{3a}$

Potenzen zusammenfassen:

- $a^6 + a^4 = a^4(a^2+1)$
- $x^5x^4 = x^9$
- $(x^5)^4 = x^{20}$
- $\frac{7^5}{7^6} = 7^{-1}$
- $5^m + 3^m \rightarrow$ keine Änderung
- $5^m3^m = 15^m$
- $a^43^4 = (3a)^4$
- $5^n3^{2n} = 5^n(3^2)^n = (5\cdot 9)^n = 45^n$
- $5^n3^{n+3} = 5^n3^n3^3 = 9(5\cdot 3)^n = 9\cdot 15^n$

Wurzeln

- $a^{1/2}a^{3/2} = a^{4/2} = a^2$
- $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{a^{1/2}} = a^{-1/2}$
- $\sqrt{36} = \sqrt{4\cdot 9} = \sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = 2\cdot 3 = 6$
- $\sqrt{27} = \sqrt{9}\cdot\sqrt{3} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt{8}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$
- $\sqrt{64}/\sqrt[3]{3} = 8/\sqrt[3]{3}$
- $\sqrt{64}/\sqrt[3]{64}(= 8/4) = 64^{1/2} - 64^{1/3} = 64^{1/6} = 2$
- $\sqrt{5}\cdot\sqrt{25} = 5\sqrt{5}$
- $\sqrt{5 - 9/3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{4} = 2$
- $\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2^2} = 2^{2/3}$
- $\sqrt[3]{4}\cdot 2^{1/3} = 2$

Wiederholung einfaches Rechnen

- $5-3(2-a)=3a-1$
- $2(x^2-x)+x=2x^2-2x+x=2x^2-x$
- $(2-3a)(2+3a)=4-9a^2$
- $\frac{4+a}{2}=\frac{4}{2}+\frac{a}{2}=2+\frac{a}{2}$
- $\frac{2}{3}+\frac{7}{6}=\frac{11}{6}$
- $\frac{27-3a}{6x}=\frac{9-a}{2x}$
- $\frac{4}{3}-2\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)=\frac{4}{3}-\frac{3\cdot5}{3}=-\frac{16}{3}$
- $\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{2}3=\frac{1}{6}+\frac{9}{2}=\frac{28}{6}=\frac{14}{3}$
- $5^3 5^{-2}=5$
- $\frac{2^3\cdot2^5}{4^2}=\frac{2^8}{2^4}=2^4=16$
- $\sqrt{3}\cdot9^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{1}{3}}\cdot3^{\frac{2}{3}}=3$
- $\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
- $\frac{8^3}{4^2}=\frac{2^9}{2^4}=2^5=32$
- $\sqrt{3+3!}=\sqrt{3+6}=3$
- $\sum_{i=1}^{3}(i+1)=2+3+4=9$
- $\sqrt[3]{8^6}=8^{6/3}=8^2=64$

Bingoaufgaben

1) $(3-1)(5-1)$ $\Rightarrow 8$
2) $\frac{17}{11}+\frac{16}{11}$ $\Rightarrow 3$
3) $4!$ $\Rightarrow 24$
4) 5^2-2^3 $\Rightarrow 17$
5) $2^2\cdot3$ $\Rightarrow 12$
6) $2\cdot3\cdot5$ $\Rightarrow 30$
7) $\sum_{i=1}^{4} i$ $\Rightarrow 10$
8) $\frac{5+3}{8-4}$ $\Rightarrow 2$
9) $5\cdot3-2$ $\Rightarrow 13$
10) $3+\frac{7+5}{8}-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow 4$
11) $3\cdot7$ $\Rightarrow 21$
12) $\sum_{i=1}^{5} i$ $\Rightarrow 15$
13) 4^2+3^2 $\Rightarrow 25$
14) $5\cdot\left(\frac{17}{4}-\frac{2}{8}\right)$ $\Rightarrow 20$
15) 6^0 $\Rightarrow 1$
16) $4+3^0$ $\Rightarrow 5$
17) 3^3-2^3 $\Rightarrow 19$
18) $\frac{52}{2}$ $\Rightarrow 26$
19) $(5+8)\cdot2-3$ $\Rightarrow 23$
20) $\frac{7/3}{1/3}$ $\Rightarrow 7$
21) $\frac{1}{4^{-2}}$ $\Rightarrow 16$
22) $111-66-16$ $\Rightarrow 29$
23) 3^2 $\Rightarrow 9$
24) $3!$ $\Rightarrow 6$
25) $\frac{28}{2}$ $\Rightarrow 14$
26) $13+7\cdot2$ $\Rightarrow 27$
27) $2\cdot3^2$ $\Rightarrow 18$
28) $\frac{132}{6}$ $\Rightarrow 22$
29) $3\cdot4-1$ $\Rightarrow 11$
30) $\sum_{i=1}^{7} i$ $\Rightarrow 28$

Exponentielle Funktionen und Logarithmen:

- $\frac{e^{3x}}{2e^x}=\frac{1}{2}e^{2x}$
- $\frac{1}{e^{x-5}}=e^{-x+5}$
- $\log(10)=1$
- $\ln(1)=0$

- $\frac{\log(x^2)}{2} = \log(x)$
- $32 = 2^x \rightarrow \log_2(32) = x = 5$
- $625 = 5^x \rightarrow \log(625) = x\log(5) \rightarrow x = \log_5(625) = \frac{\log(625)}{\log(5)} = 4$
- $\log_2(3) + \log_2(5) = \log_2(15)$
- $\log_2(3) + \log_2(3) = 2\log_2(3) = \log_2(3^2) = \log_2(9)$
- $3\log(10) = 3$
- $\log(200) = \log(2) + \log(100) = 2 + \log(2)$

Ableitungen:

- $(5x^4)' = 20x^3$
- $\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2}$
- $(x^2 - x^{-3})' = 2x + 3x^{-4}$
- $(e^{2x})' = e^{2x} \cdot 2$ (Kettenregel)
- $(e^{x^\wedge 2})' = e^{x^\wedge 2} \cdot 2$ (Kettenregel)
- $\left(\frac{x^2-1}{x-1}\right)' \rightarrow$ entweder $= (x+1)' = 1$ oder $\frac{2x(x-1)-x^2+1}{(x-1)^2} = 1$
- $(2x^2 - 4x + 10)' = 4x - 4$
- $(3\ln x + 2e^x)' = \frac{3}{x} + 2e^x$
- $\left(\frac{1}{3x^2}\right)' = \frac{1}{3}(-2\,x^{-3}) = -\frac{2}{3x^3}$
- $\left(\frac{x^2-2x+1}{x}\right)' = \left(x - 2 + \frac{1}{x}\right)' = 1 - \frac{1}{x^2}$
- $\left(\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^2\right)' \rightarrow$ zwei Wege (1) $\left(x^4 + 2x + \frac{1}{x^2}\right)' = 4x^3 + 2 - \frac{2}{x^3}$
  (2) $= 2\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)\left(2x - \frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 - 2 + 4 - \frac{2}{x^3} = 4x^3 + 2 - \frac{2}{x^3}$
- $\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2x^{1/2}}$
- $(x^2e^x)' = 2x\,e^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$
- $(x\ln x - x)' = \ln x + x\frac{1}{x} - 1 = \ln x$
- $((x^2+2)^4)' \rightarrow g(x) = x^2 + 2, f(g) = g^4 \rightarrow (\cdot)' = 4g^3 \cdot 2x = 8x(x^2+2)^3$
- $\left(5e^{x^2}\right)' = 5e^{x^2} \cdot 2x = 10xe^{x^2}$
- $(a^x)' = \left(e^{\ln a^x}\right)' = \left(e^{x\ln a}\right)' = e^{x\ln a} \cdot \ln(a) = a^x\ln(a)$
- $\left(5x - \frac{x}{a}\right)' = 5 - \frac{1}{a}$
- $(10\ln(x) - x^{-1})' = \frac{10}{x} + \frac{1}{x^2}$
- $(e^{3x+1})' = 3e^{3x+1}$
- $((5x^2-1)^3)' = 3(5x^2-1)^2 10x = 30x(5x^2-1)^3$
- $((2+x)(2-x))' = (4-x^2)' = -2x$

Zusatzaufgaben:

- Bestimme Steigung der Tangente der Kurve ($y = -x^\wedge 2$) an Punkt $(1,1)$
  $\rightarrow y' = -2x\,|_{x=1} = -2$
- $(\log_k x)' = \left(\frac{\ln(x)}{\ln(k)}\right)' = \frac{1}{\ln(k)x}$

Integration:

- $\int 1\,dx = x + C$
- $\int e^{2x}\,dx = \frac{1}{2}e^{2x} + C$
- $\int e^{1}\,dx = e^{1}x + C = ex + C$
- $\int 4x^2\,dx = \frac{4}{3}x^3 + C$
- $\int x^4 - 4x^3\,dx = \frac{x^5}{4} - x^4 + C$
- $\int \frac{3}{x^2} - \frac{1}{2x^3}\,dx = -\frac{3}{x} + \frac{1}{4x^2} + C$
- $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}} + C$
- $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx = \int x + \frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2} + \ln(x) + C$
- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
- $\int 5x^a\,dx = \frac{5}{a+1}x^{a+1} + C$
- $\int_2^4 2x\,dx = x^2 + C|_2^4 = 12$
- $\int_0^4 3\,dx = 3x + C|_0^4 = 12$
- $\int_{-1}^{2} x^2 - 1\,dx = \frac{x^3}{3} - x + C|_{-1}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = 0$
- $\int_2^5 \frac{x}{2} - 1\,dx = \frac{x^2}{4} - x + C|_2^5 = \left(\frac{25}{4} - 5\right) - (1 - 2) = \frac{9}{4}$
- $\int_0^a kx\,dx = \frac{k}{2}x^2 + C|_0^a = \frac{ka^2}{2}$

Gleichungen nach x auflösen

- \- $5x - 1 = 9 \rightarrow 5x = 10 \rightarrow x = 2$
- $\frac{x}{2} + 2 = 0 \rightarrow \quad x = -4$
- $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$
- $3x^2 - 15 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{5}$
- $5x^2 - 10x = 0 \rightarrow x \in \{0; 2\}$
- $ax + 7 = 3x - b \rightarrow x = \frac{-b-7}{a-3} = -\frac{b+7}{a-3}$
- $(x-3)^2 + 3x^2 = (2x+7)^2 \rightarrow x^2 - 6x + 9 + 3x^2 = 4x^2 + 28x + 49$
  $\rightarrow\ -40 = 34x \rightarrow\ \ x = -20/17$
- $\frac{x+2}{x^2+x} = \frac{3}{2+3x} \rightarrow\ \ (x+2)(2+3x) = 3(x^2+x) \rightarrow\ \ 2x + 4 + 3x^2 + 6x = 3x^2 + 3x$
  $\rightarrow 5x = -4 \rightarrow x = -4/5$

Funktionen Schnittstelle a bestimmen

- $f(x) = \sqrt{x} + 2$
  $f(a) = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} + 2 = 3 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 1 \Leftrightarrow a = 1$
- $f(x) = x^2$
  $f(a) = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$
- $f(x) = x^2 + x$
  $f(a) = 1 \Leftrightarrow a^2 + a - 1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \ -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

Sachaufgaben

1) Ein Drucker druckt 600 Seiten in 12 Minuten. Wie lange braucht er für 900 Seiten? Wie viele Seiten druckt er in 15 Minuten?

$\rightarrow 600{:}\, 12\, min = 900{:}\, x \rightarrow x = 18\, min$

$\rightarrow 600{:}\, 12\, min = x{:}\, 15\, min \rightarrow x = 750$

2) Im Supermarkt gibt es Rindfleisch im Angebot: $700\ g$ Rindfleisch kosten $8{,}40€$. Wie teuer ist der Kilopreis? Wie viel Fleisch bekomme ich für $30€$?

$\rightarrow 700\ g{:}\, 8{,}4€ = 1000\ g{:}\, x \rightarrow x = 12€$

$\rightarrow 700\ g{:}\, 8{,}4€ = x{:}\, 30€$ ODER $1\ kg{:}\, 12€ = x{:}\, 30€ \rightarrow x = 2{,}5\ kg$

3) Eine Hausarbeit wird von drei Studenten gemeinsam in 7 Tagen bearbeitet. Wie lange benötigen dann zwei Studenten für die gleiche Arbeit?

$\rightarrow 3 \cdot 7 = 2 \cdot x \rightarrow x = 1{,}5$ Wochen ≈ 11 Tage

4) 2 Kühe fressen während 1 Tages $48\ kg$ Gras. Wie viele kg fressen 5 Kühe in 6 Stunden?

$\rightarrow 2\ K \cdot 1\ d = 48\ kg \leftrightarrow 1\ K \cdot 1\ d = 24\ kg \leftrightarrow 1\ K \cdot 6\ h = 6\ kg \leftrightarrow 5\ K \cdot 6\ h = 30\ kg$

Gemischt proportionale und antiproportionale Zuordnung, andere Variante:

$\rightarrow 5\ K{:}\, x = 2\ K{:}\, 48\ kg \rightarrow x = 120\ kg$

$\rightarrow 120\ kg{:}\, 24\ h = x{:}\, 6\ h \rightarrow x = \frac{120}{4} kg = 30\ kg$

Oder:

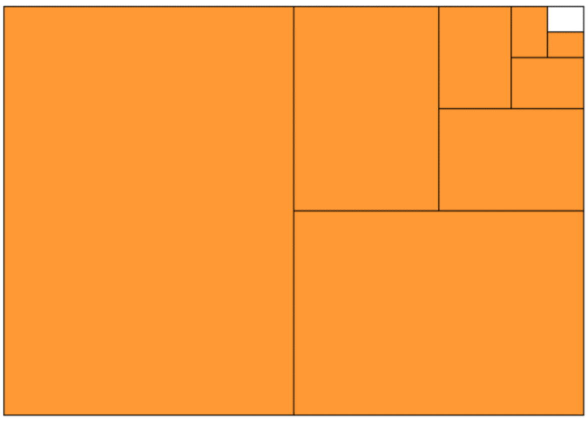
$$\rightarrow \frac{2K \cdot 1d}{48\ kg} = \frac{5K \cdot 0{,}25d}{x} \rightarrow x = 48\ kg \cdot \frac{5/4}{2} = 30\ kg$$

5) 6 Studenten reinigen den Laborraum innerhalb von 3 Stunden. Wie lange bräuchte ein Student dafür?

$\rightarrow 6S \cdot 3h = 1S \cdot x$

$\rightarrow x = 18h$

6) DIN Papier



Wie ist das Verhältnis der jeweils längeren zur kürzeren Seite?

Länge a, Breite b; A5: Länge b, Breite $\frac{a}{2}$

$\rightarrow$ Verhältnis Seiten gleich $\rightarrow a{:}\, b = b{:}\frac{a}{2}$

$$\rightarrow \frac{a^2}{2} = b^2$$

$\rightarrow a = \sqrt{2}b$

Das Verhältnis ist $\sqrt{2} : 1$.

Vektoren

- $\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}$
- $\left|\begin{pmatrix}5\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{35}$
- $\left|\begin{pmatrix}2\\4\\-3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{29}$
- $\left|\begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{26}$

- $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$
- $\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-0\\0+2\\4-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = 0 + 4 - 4 = 0 \rightarrow$ senkrecht
- $\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\7\\6\end{pmatrix} = 3 + 14 - 18 = -1$
- $\begin{pmatrix}3\\2\\-3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\7\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}12+21\\-3-18\\31-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}33\\-21\\29\end{pmatrix}$

- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} = -4 + 2 + 6 = 4$
- $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-4\\1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4-3\\-12-2\\1+8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-14\\9\end{pmatrix}$

Matrizen

- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 19 & 11 \\ 3 & 13 & 14 \\ -4 & 13 & 3 \end{pmatrix}$

Determinante der drei Matrizen:

1) $= 3 \cdot 0 - 4 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) = 13$
2) $= 1 \cdot (-6 - 10) - 2 \cdot (4 - 15) - 1 \cdot (4 + 9) = -16 + 22 - 13 = -7$
3) $= 2 \cdot (3 - 5) - 2 \cdot (-3 - 5) + 0 \cdot (3 + 3) = -4 + 16 = 12$

- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

Von allen drei Matrizen die Determinante:

1) $= 1 \cdot 0 - 0 + 2 \cdot (-1) = -2$
2) $= 0 - 2 \cdot 1 + 0 = -2$
3) $= -2 \cdot (6 - 8) = 4$

$\rightarrow \det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

- $det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 - 0 \cdot (-1) = 2$
- $det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = -1 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -2$

Wiederholung

Brüche

- $\frac{27}{6} = \frac{9}{2}$
- $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{2+3}{4} = \frac{5}{4}$
- $-\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{15} + \frac{3}{5} = -\frac{1}{20} + \frac{12}{20} = \frac{11}{20}$
- $\frac{2/3}{3/4} = \frac{8}{9}$
- $\frac{a}{2} + \frac{2}{3} = \frac{3a+4}{6}$
- $\frac{2}{3} - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} - 2\left(\frac{2-5}{20}\right) = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{10+9}{15} = \frac{19}{15}$

Potenzen

- $\frac{2^a}{5^a} = \left(\frac{2}{5}\right)^a$
- $3^4 \cdot 9^2 = 3^4 \cdot (3^2)^2 = 3^4 \cdot 3^4 = 9^4$
- $3^5 - a^5$ =k.Ä.
- $b^3 \cdot (2b)^4 = b^3 \cdot 2^4 \cdot b^4 = 2^4 \cdot b^7 \; (= 16 \cdot b^7)$
- $-2^3(a^3 - 2^2) = -(2a)^3 + 2^5$
- $3^7 \cdot 2^7 \cdot 6^2 = 6^7 \cdot 6^2 = 6^9$
- $5^a \cdot 5^{-3} = 5^{a-3}$
- $-3^a(2^a + 3^a) = -6^a - 3^{2a} = -6^a - 9^a$
- $3^2 \cdot 3^{-2} = 1$
- $\left(\frac{1}{2} - x\right)^2 = \frac{1}{4} - x + x^2$
- $\frac{1-4x^2}{2x+1} = 1 - 2x$

Wurzeln

- $\sqrt{4} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$
- $\sqrt{3} \cdot \sqrt{9} = 3\sqrt{3}$
- $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} = 3$
- $3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{3}{5}}$
- $2^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{4}} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$ oder $2^{\frac{1}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}} = 2$
- $3\sqrt{2} - \sqrt{18} = 0$
- $\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

Ableitungen

- $(3x^3)' = 9x^2$
- $((2x+1)^2)' = 2(2x+1) \cdot 2 = 8x + 4$
- $\left(e^{-x^2}\right)' = e^{-x^2} \cdot (-2x)$
- $(x^3(1+x))' = (1)\; 3x^2(1+x) + x^3 = 3x^2 + 4x^3$
  $= (2)\; (x^3 + x^4)' = 3x^2 + 4x^3$
- $(2\cos(x))' = -2\sin(x)$
- $(\cos(x)\sin(x))' = -\sin(x)^2 + \cos(x)^2$
- $\left(\frac{1}{\tan(x)}\right)' = \left(\frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)' = -\frac{1}{\sin(x)^2}$
- $\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)' = 4\pi x^2$

Integrationen

- $\int 5x \; dx = \frac{5}{2}x^2 + C$
- $\int \cos(x) \; dx = \sin(x) + C$
- $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3} + C|_0^1 = \frac{1}{3}$
- $\int 2x \cdot e^{x^2} \; dx = e^{x^2} + C$
- $\int \frac{k}{x} \, dx = k \cdot \ln(x) + C$
- $\int_{-1}^{1} 1 - 2x \, dx = x - x^2 + C|_{-1}^{1} = (1-1) - (-1-1) = 0 - (-2) = 2$
- $\int 5\sin(x) \; dx = -5\cos(x) + C$
- $\int 2\sin(x)\cos(x) \; dx = \sin(\mathrm{x})^2 + C = -\cos(x)^2 + C$ (hier unterschiedliche C)

Gleichungen lösen

- $5x - 2 = 2x + 7 \rightarrow 3x = 9 \rightarrow x = 3$
- $x^2 + 2x - 3 = 2(x+3) \rightarrow x^2 + 2x - 3 = 2x + 6 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x \in \{-3; 3\}$
- $2x^2 + 3x - 2 = 0 \rightarrow \; x^2 + \frac{3}{2}x - 1 \rightarrow x = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} \rightarrow x \in \left\{-2; \frac{1}{2}\right\}$
- $f(x) = \ln(x)$
  $f(a) = 0 \rightarrow \ln(a) = 0 \rightarrow a = e^0 = 1$
- $f(x) = 2x(x-2)$
  $f(a) = 0 \rightarrow 2a(a-2) = 0 \rightarrow a \in \{0; 2\}$
- $f(x) = 2\;\log_5(x)$
  $a = 10 \rightarrow 5 = \log_5(a) \rightarrow \; a = 5^5$

Vektoren

- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$
- $\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{13}$; $\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{17}$