Blockkurs Mathematik – FU Berlin Geowissenschaften – WS 2017/18

Lena Noack

Einfaches Rechnen

Kommutativgesetz:
$a + b = b + a$ (gilt nicht für $a - b$)
$a \cdot b = b \cdot a$ (gilt nicht für a/b)

Assoziativgesetz:
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

Operatorenreihenfolge:
1. Klammern (von innen nach außen)
2. Multiplikation und Division
3. Addition und Subtraktion

Brüche
$\frac{a}{b}$ oder a/b oder $^a/_b$ oder $a{:}b$ oder $a \div b$ oder $a\,b^{-1}$; -> a/b im Taschenrechner
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$
- $\frac{ak}{bk} = \frac{a}{b}, k \neq 0$
- $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$
- $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
- $\frac{a}{b} / \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$
- $\frac{1}{a} = \frac{1}{a^1} = a^{-1}$; $\frac{1}{a^2} = a^{-2}$

Ausklammern
- $ac \pm bc = (a \pm b)c$
- $\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = (a \pm b)\frac{1}{c} = \frac{a \pm b}{c}$

Klammern multiplizieren
$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$

Binomische Formeln
- $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)(a - b) = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Potenzen, Wurzeln
- $a^0 = 1$
- Multiplikation, gleiche Basis: $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
- Division, gleiche Basis: $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
- Potenzieren von Potenzen: $(a^n)^m = a^{nm} = a^{mn} = (a^m)^n$
- Multiplikation, gleiche Exponenten: $a^m \cdot b^m = (ab)^m$
- Division, gleiche Exponenten: $\frac{a^m}{b^m} = (\frac{a}{b})^m$
  - $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
  - $\sqrt{ab} = (ab)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
  - $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
  - $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$

Fakultät
- $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$
- $n! = n \cdot (n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{i=1}^{n} i$
- $0! = 1$

Summe
- $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \cdots + n - 1 + n$

Eulersche Zahl
- e = $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 2.718\dots$

Primzahlen
Ganze Zahlen die nur durch 1 und sich selbst teilbar sind:
1,2,3,5,7,11,13,17,19,23,29, ...

Räume
- $\mathbb{Z}$ - alle ganzen Zahlen (...,-2,-1,0,1,2,...)
- $\mathbb{N}$ - alle natürlichen Zahlen, alle ganzen, positiven Zahlen
- $\mathbb{N}_0$ - alle natürlichen Zahlen plus 0 (0,1,2,3,...)
- $\mathbb{N}_\emptyset$ - alle natürlichen Zahlen ohne 0 (1,2,3,...)
- $\mathbb{Q}$ - alle rationalen Zahlen, d.h, Zahlen die durch Brüche mit ganzen Zahlen im Zähler und Nenner darstellbar sind ($\mathbb{Q}$ = {m/n | m,n $\in \mathbb{Z}$, n $\neq$ 0})
- $\mathbb{R}$ - alle reellen Zahlen: jede Zahl auf der Zahlengeraden "ohne Zwischenräume", jede reelle Zahl auch als Dezimalzahl darstellbar, evt. unendlich viele Ziffern (π)
- $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ ($\mathbb{R}$ ohne $\mathbb{Q}$) - alle irrationalen Zahlen
- $\mathbb{C}$ - komplexe Zahlen, $\sqrt{-1} =: i$ ist keine reelle Zahl -> $z = a + b\,i$

Intervalle
sind Teilmengen von Räumen
- $[a;b]$ → alle Zahlen von a bis b, beinhaltet a und b
- $(a;b)$ → gleiches Intervall ohne a und b
- $\{a;b\}$ → Menge die nur zwei Zahlen a und b enthält

Mengen
- Menge M $\subset \mathbb{R}$ -> Menge die in Raum $\mathbb{R}$ enthalten ist
- M $\cup$ N -> Vereinigungsmenge: Elemente entweder in M oder N
- M $\cap$ N -> Schnittmenge zwischen M und N
- N \ M -> Elemente in N, die nicht in M sind
- x $\in$ M -> x ist Element der Menge M

Exponentielle Funktionen
Für exponentielles Wachstum, z.B. 2^x
- für $a \neq 0; a \neq 1$:
- $a^x \cdot a^k = a^{x+k}$
- $a^{x-k} = a^x / a^k$
- $(a^x)^k = a^{kx}$
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$
- $e^x := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$

Logarithmus
- $\log_k(k) = 1$
- $\log_k(1) = 0$
- $\log_k(k^a) = a$
- $\log_k(a^b) = b \cdot \log_k(a)$
- $\log_k(a \cdot b) = \log_k(a) + \log_k(b)$
- $\log_k(\frac{a}{b}) = \log_k(a) - \log_k(b)$
- $\log_k(a) = \log(a) / \log(k)$

➔ Potenzfunktionen: x^a (x Variable und a Konstante)
➔ Exponentielle Funktionen: a^x
➔ Exponentialfunktion: e^x

Trigonometrische Funktionen

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ für all $x \in \mathbb{R}$
- tan (x) = sin (x) / cos (x)
- tan (x) = y → x = arctan(y)
  analog : arcsin, arccos, arccot
- sin (-x) = -sin (x)
- cos (-x) = cos (x)
- tan (-x) = -tan (x)

Im Dreieck definiert:
- sin = Gegenkathete / Hypotenuse
- cos = Ankathete / Hypotenuse
- tan = Gegenkathete / Ankathete
  → tan = sin/cos
- cot = Ankathete / Gegenkathete
  → cot = cos/sin

Funktion

Funktion $f(x)$; $x \in$ M1, $f(x) \in$ M2

- Steigung Funktion an x: $m = \lim\limits_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$
- $f'(x) > 0 \to$ positive Steigung an x
- $f'(x) < 0 \to$ negative Steigung an x
- $f'(x) = 0 \to$ waagerecht an x

Ableitung

Geschrieben als: $f(x)'; f'; \frac{df}{dx}; f_x; d_x f; \dot{f}$

- $(f \pm g) = f' \pm g'$
- $(f\, g)' = f'g + fg'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- $(f \circ g)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'$

- $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
- $(x)' = 1$
- $(c)' = 0; c$ Konstante
- $(e^x)' = e^x$
- $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$

- $(\sin x)' = \cos x$
- $(\cos x)' = -\sin x$
- $(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \ \cos x - \sin x \ (-\sin x)}{\cos x^2} = \frac{1}{\cos x^2}$

Integral

Stammfunktion geschrieben mit $F(x) = \int f(x)\, dx$

- $\int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C$
- $\int e^x dx = e^x + C \quad / \quad \int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$
- $\int x^{-1} dx = \ln(x) + C$
- $\int_a^b f\, dx = F(b) - F(a) = -\big(F(a) - F(b)\big) = -\int_b^a f\, dx$
- $\int_a^c f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^c f(x)\, dx$
- $\int f \pm g\, dx = \int f\, dx \pm \int g\, dx$
- $\int af\, dx = a \int f\, dx$, a Konstante
- $\int f g'\, dx = fg - \int f' g\, dx$

Geometrie

Rechteck (Seiten a, b)
- Umfang $U = 2a + 2b$
- Fläche $A = a \cdot b$

Quader (Seiten a, b, c)
- Oberfläche: $A_s = 2(ab + ac + bc)$
- Volumen: $V = a \cdot b \cdot c$

Würfel (Seiten gleich lang, a)
- Oberfläche: $A_s = 6a^2$
- Volumen: $V = a^3$

Dreieck (Seiten a, b, c; Winkel α, β, γ)
- Umfang: $a + b + c$
- Fläche:

  1) wenn rechter Winkel: $A = \frac{ab}{2}$

  2) alle Winkel 60°, drei Seiten gleicher Länge a: $A = \frac{ah}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

  3) beliebige Winkel $\to A = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{a \cdot c \cdot \sin(\beta)}{2}$

Kreis (Radius r, Bogenwinkel rad)
- Umfang: $2\pi r$
- Fläche: πr^2

Kugel (Radius r)
- Oberfläche: $4\pi r^2$
- Volumen: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Gleichungen lösen

Lineare Gleichungen lösen

Alle Terme mit x auf eine Seite bringen, alle anderen Terme auf die andere Seite, durch Vorfaktor von x teilen

Quadratische Gleichungen lösen

$x^2 + px + q = 0$

(1) $x^2 + q = 0 \to x = \pm\sqrt{-q}$

(2) $x^2 + px = 0 \to x \in \{-p, 0\}$

(3) $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Vektoren

- $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ – n-dimensionaler Vektor, Schreibweisen: $\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$; $(v_x \quad v_y)$; (v_x, v_y)
- $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ in zwei Dimensionen, $|\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ in drei Dimensionen
- $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$; $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_x - w_x \\ v_y - w_y \\ v_z - w_z \end{pmatrix}$
- $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$
- a konstant: $a\, \vec{v} = \begin{pmatrix} a\, v_x \\ a\, v_y \\ a\, v_z \end{pmatrix} = \vec{v}\, a$
- $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}$

Skalarprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{v}\vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cos\alpha(\vec{v}, \vec{w})$
- Kommutativgesetz: $\vec{v} \cdot \vec{w} = \vec{w} \cdot \vec{v}$
- Multiplikation mit Skalar: $a\, (\vec{v} \cdot \vec{w}) = (a\vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{v} \cdot (a\vec{w})$
- Distributivgesetz: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ und $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$

Kreuzprodukt: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_y w_z - v_z w_y \\ v_z w_x - v_x w_z \\ v_x w_y - v_y w_x \end{pmatrix}$
- $\vec{u} = \vec{v} \times \vec{w} \to \vec{u}$ senkrecht auf Ebene, die von $\vec{v}$ und $\vec{w}$ aufgespannt wird
- Umgekehrt kommutativ: $\vec{v} \times \vec{w} = -\vec{w} \times \vec{v}$
- nicht assoziativ, d.h. $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w}) \neq (\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$

Matrizen

- $A \in \mathbb{R}^{m*n}$
- $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2*3}$
- $A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}$
- $diag(A) = (a_{11} \ \ a_{22} \ \ldots)$
- $spur(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$

- $A + B = B + A = (a_{ij} + b_{ij})$; $A, B \in \mathbb{R}^{m*n}$
- $A \cdot B = C \ \ \to A \in \mathbb{R}^{m*n}, B \in \mathbb{R}^{n*k}, C \in \mathbb{R}^{m*k}$
- $cA = Ac = \big(c \cdot a_{ij}\big)$
- $A \cdot B \neq B \cdot A$
- $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$

- A^{-1} Inverse Matrix: $A \in \mathbb{R}^{n*n}$; $\det A \neq 0 \to AA^{-1} = A^{-1}A = E$ (Einheitsmatrix)
- $A \cdot B = \begin{pmatrix} -a_1- \\ -a_2- \\ -a_3- \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} | & | & | \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & a_1 \cdot b_3 \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & a_2 \cdot b_3 \\ a_3 \cdot b_1 & a_3 \cdot b_2 & a_3 \cdot b_3 \end{pmatrix}$

Determinante

- $\det A = |A| \qquad |a_{11}| = a_{11} \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$
- $\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

ODER
- $\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$